المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تخصص إلكترونيات صناعية وتحكم

هندسة كهربائية – ٢

١٦١الك

طبعة ١٤٢٩ هـ

مقدمة

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " **هندسة كهربائية – ٢** " لمتدربي تخصص " **إلكترونيات صناعية وتحكم** " في الكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه وسلم، ... وبعد،

نتيجة للتطور الذي تشهده المملكة العربية السعودية في شتى مجالات التقنية المختلفة، كان لزاماً تخريج كوادر وطنية قادرة على استيعاب هذه التقنيات بمهارة وإتقان.

وانطلاقاً من حرص ولاة الأمر في هذا البلد وقناعتهم بالاستفادة من هذه التقنيات والأخذ بأسباب التقدم بما يتوافق مع شريعتنا الغراء، فقد عهدت الدولة إلى المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني مهمة إعداد كوادر فنية مدربة قادرة على استيعاب وسائل التقنية الحديثة. وانطلاقاً من هذا الهدف النبيل قامت المؤسسة بجهد مشكور في هذا الميدان، حيث قامت بعمل ورش مختلفة وذلك بغرض تحديد المواصفات المهنية لكل تخصص فني، ومن ثم عهدت المؤسسة بتكليف بعض الأقسام في الكليات التقنية المختلفة بتأليف وإعداد مناهج نظرية وعملية متوافقة مع مواصفات التخصصات الفنية المختلفة. ومن هنا كان منهج الهندسة الكهربائية- ٢ من ثمار هذا الجهد الرائع الذي قامت به الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج بالمؤسسة.

وإننا نقدم هذا المنهج لطلاب الكليات التقنية، بما يتوافق مع احتياجات المتدرب ومستواه الدراسي، وبأسلوب مبسط خالٍ من التعقيد، دون الإخلال بالمحتوى العلمي.

وختاماً، نسأل المولى عز وجل أن يوفق القائمين على هذا المشروع بكل خير، كما نسأله تعالى أن يوفق أبناءنا الطلاب لفهم هذا المنهج عملياً وأن يجعل أعمالنا خالصة لوجهه الكريم، وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

وصلى الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم، ......

هندسة كهربائية- ٢

مقدمة التيار المتردد

مقدمة التيار المتردد

١

الأهداف العامة للوحدة الأولى

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة، يكون المتدرب قادراً على:

- معرفة التيار المتردد وأوجه الاختلاف بين التيار المستمر والمتردد.
- استيعاب التأثير المغناطيسي للتيار الكهربائي وقانون فاراداي.
- فهم كيفية توليد الموجة الجيبية.
- تحليل الموجة الجيبية رياضياً.
- حساب القيمة المتوسطة والقيمة الفعالة للموجة الجيبية.
- حساب زاوية الطور.
- تمثيل الموجة الجيبية اتجاهياً ورياضياً.

١- ١ مقدمة Introduction

في هذا المقرر يدرس المتدرب مبادئ وعناصر دوائر التيار المتردد بعد دراسته للمتطلب هندسة كهربائية- ١". حيث كانت منابع الجهد والتيار التي تستخدم في الدوائر الكهربية من النوع المستمر (قيمة ثابتة واتجاه واحد وليس لها تردد) .... ومع هذا نجد كثيرا من الشبكات يعمل بمنابع التيار المتردد، ومن أكثر شبكات التيار المتردد شيوعا شبكة القوى الكهربائية المحتوية على محطات التوليد، وخطوط النقل ومحطات المحولات......الخ وبالرغم من أن الرمز AC يعد اختصارا لكلمتي التيار المتردد بالانجليزية Alternating Current الذي يعني أن التيار أو الجهد يعكس إشارته بصفة دورية منتظمة إلا أننا سوف نقتصر في هذه الدراسة على الكميات ذات التغير الجيبي أي أن تغير الجهد مثلا يكون كالتالي:

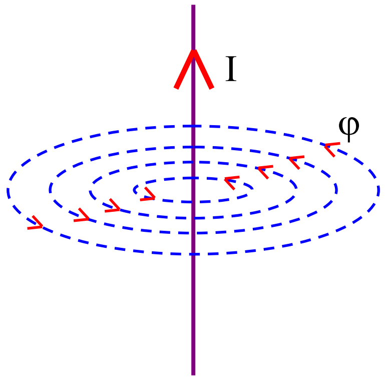
$$V_a = V_m \sin \omega t \qquad (١- ١)$$

ويمكن بطبيعة الحال استخدام دالة جيب التمام بدلا من دالة الجيب ولكننا سنفضل في دراستنا الصورة المعطاة السابقة، ويمكن تمثيل التغير الجيبي بيانيا كما في شكل (١- ٤) وهو تمثيل للمعادلة السابقة (١- ١) ومن الشكل والمعادلة تكون Vm القيمة العظمى، وتسمى ω التردد الدائري، يقاس بالزاوية نصف القطرية لكل ثانية (rad/s) ويلاحظ أن الدالة V_a دالة دورية تكرر نفسها على فترات منتظمة، كل منها 2π أو (٢ط) زاوية نصف قطرية ، وسوف نشرح بالتفصيل خصائص الموجة الجيبية التي تمثل التيار المتردد في الوحدة الأولى .

١- ٢ التأثير المغناطيسي للتيار الكهربائي Magnetic Effects of Electrical Current

١- ٢- ١ توليد وتركيز المجال المغناطيسي Generation & Concentration of Magnetic Field

من المعروف أنه إذا مر تيار كهربائي في موصل ما ، فإن مرور هذا التيار الكهربائي يسبب نشوء ما يسمى بالمجال المغناطيسي (Magnetic Field) حول هذا الموصل على هيئة دوائر (تسمى خطوط القوى المغناطيسية (أو الفيض المغناطيسي)، ويرمز له بالرمز φ)، ويكون الموصل في مركز هذه الدوائر كما هو مبين بشكل (٢- ١).



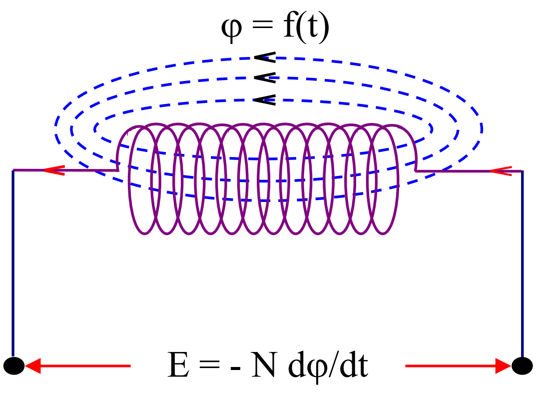
شكل (١- ١) دوائر المجال المغناطيسي.

وخطوط القوى المغناطيسية هذه يكون لها اتجاه يرتبط باتجاه سريان التيار الكهربائي، وتربطهما قاعدة تسمى قاعدة البريمة لليد اليمنى: حيث يتم فتح اليد اليمنى بحيث يكون اتجاه إصبع الإبهام عمودياً على اتجاه باقي الأصابع، وإذا اعتبر اتجاه التيار في اتجاه إصبع الإبهام، يكون اتجاه خطوط القوى المغناطيسية في اتجاه دوران باقي الأصابع. ولتركيز المجال المغناطيسي (أو خطوط القوى المغناطيسية φ)، يتم لف هذا الموصل (السلك) على هيئة ملف.

١- ٢- ٢ قانون فاراداي **Faraday's Law**

ينص قانون فاراداي على أنه إذا تعرض ملف ما ذو عدد لفات N لمجال مغناطيسي أو خطوط قوى مغناطيسية متغيرة مع الزمن كما هو مبين بشكل (١- ٢)، تتولد قوة دافعة كهربائية E (جهد كهربائي) بين طرفي هذا الملف، تتناسب مع معدل تغير المجال المغناطيسي مع الزمن وتساوي عدد اللفات N مضروباً في معدل تغير خطوط القوى المغناطيسية بالنسبة للزمن وذلك بإشارة سالبة:

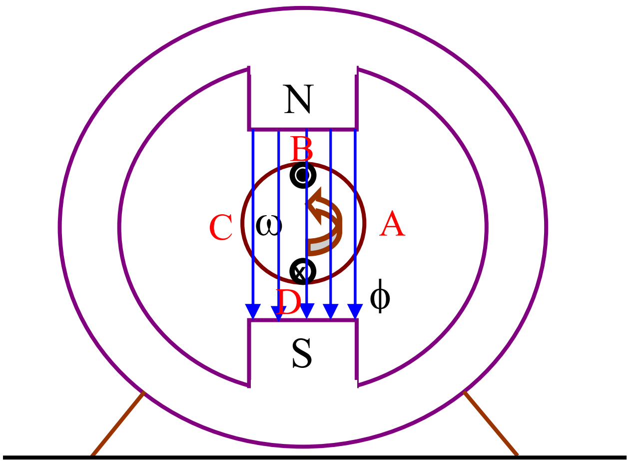
$$E = -N\frac{d\phi}{dt} \qquad (١-٢)$$



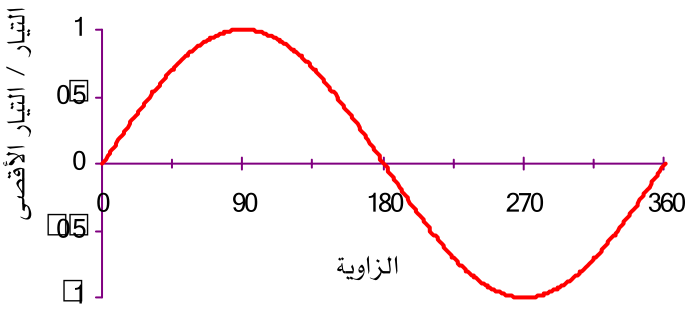
شكل (١- ٢) توليد القوة الدافعة الكهربائية طبقاً لقانون فاراداي.

١- ٣ توليد الموجة الجيبية Generation of Sine Wave

لو تخيلنا الآن أن الموصل يتحرك حركة دوارة في المجال المغناطيسي أي أنه يتبادل موقعه ما بين القطبين الشمالي والجنوبي باستمرار، كما هو مبين بشكل (١- ٣)، وبتطبيق قاعدة فلمنج نجد أن القوة الدافعة الكهربائية وكذلك التيار بهذا التبادل الحركي للموصل تحت الأقطاب المختلفة تتغير أيضاً اتجاهاتها (إشارتها) وهذا هو ما يسمى بالتيار المتردد، شكل (١- ٤).



شكل (١- ٣) توليد الموجة الجيبية.



شكل (١- ٤) شكل الموجة الجيبية.

١- ٤ التحليل الرياضي للموجة الجيبية Mathematical Analysis of Sine Wave

سوف نتناول بعض التعريفات والعلاقات الهامة المتعلقة بالحركة الدوارة للموصل في المجال المغناطيسي.

السرعة الخطية (V): هي المسافة الطولية التي يقطعها الموصل في الثانية الواحدة.

السرعة الزاوية (ω): هي الزوايا النصف قطرية التي يقطعها الموصل في الثانية الواحدة، وتقاس الزاوية نصف القطرية بوحدة تسمى راديان radians .

التردد (f): هو عدد الدورات الكاملة التي يقطعها الموصل في الثانية الواحدة.

عند قطع الموصل لدورة كاملة، فإن المسافة d التي يقطعها تكون عبارة عن طول محيط الدائرة التي قطرها D أي:

$$d = 2\pi D/2 \qquad (١-٣)$$

وتكون الزوايا نصف القطرية المقطوعة θ هي:

$$\vartheta = \frac{(2\pi D/2)}{(D/2)} = 2\pi \qquad (١-٤)$$

وبالتالي، إذا قطع الموصل في الثانية الواحدة عدد f من الدورات، يكون قطع مسافة طولية مقدارها V حيث:

$$V = (2\pi D/2)\cdot f \qquad (١-٥)$$

ويكون قطع عدد زوايا نصف قطرية مقدارها ω حيث:

$$\omega = 2\pi f \qquad (١-٦)$$

وبالتالي تكون العلاقة بين V و ω كالتالي:

$$V = \omega\cdot(D/2) \qquad (١-٧)$$

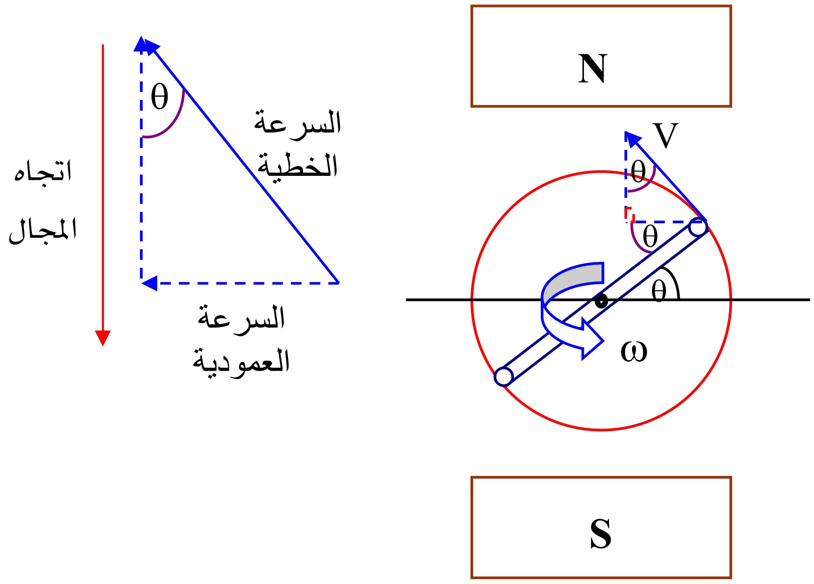
وفي خلال زمن t يكون الموصل قد قطع مسافة طولية قدرها:

$$d = V\cdot t \qquad (١-٨)$$

ويكون قد قطع زاوية نصف قطرية قدرها:

$$\theta = \omega\cdot t \qquad (١-٩)$$

لنتخيل الآن أن الموصل تحرك من نقطة الصفر ووصل إلى وضع عام حيث قطع زاوية مقدارها θ حيث يفترض أنه يتحرك بسرعة خطية ثابتة V، كما هو مبين بشكل (١- ٥)، إذن:



شكل (١- ٥) الوضع العام للموصل

$$\upsilon = V \sin\theta \qquad (١٠-١)$$

حيث υ هي السرعة العمودية على خطوط القوى المغناطيسية φ. وبالتالي فإن:

$$E = B\,\ell\,v = B\,\ell\,V\sin\theta = B\,\ell\,V\sin(\omega t) \qquad (١١-١)$$

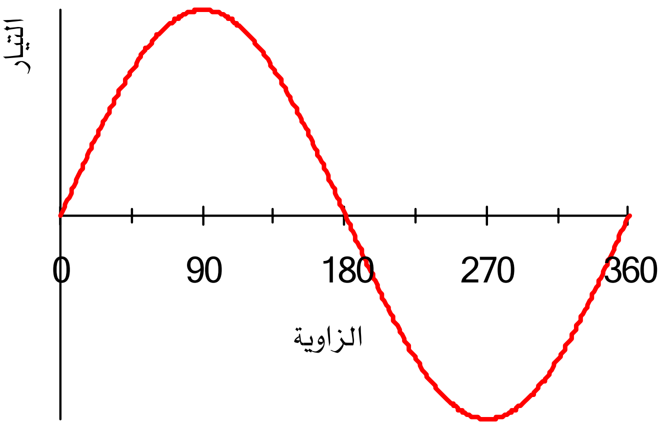
$$\therefore E = B\,\ell\,V\sin(\omega t) = E_{max}\ \sin(\omega t) \qquad (١٢-١)$$

$$\because E_{max} = B\,\ell\,V = B\,\ell\,\omega\,(D/2) \qquad (١٣-١)$$

$$\therefore E = \left(\frac{B\,\ell\,\omega\,D}{2}\right)\sin(\omega t) \qquad (١٤-١)$$

أي أن العلاقة السابقة بين قيمة القوة الدافعة الكهربائية والزاوية المقطوعة هي علاقة جيبية.

١- ٤- ١ القيمة الحسابية للموجة الجيبية Evaluation of Sine Wave



شكل (١- ٦) التيار المتردد على هيئة موجة جيبية

لأن التيار في الموجه الجيبية ليست له قيمة ثابتة مع الزمن كما هو مبين بشكل (١- ٦)، بل إنه يتغير باستمرار بصفة دورية، نجد أن السؤال الذي يطرح نفسه هو: ما هي قيمة التيار في حالة الموجة الجيبية ؟ وللإجابة على هذا السؤال لابد من التفرقة هنا بين حالتين: الحالة الأولى هي حالة اعتبار الشحنة الكهربائية والحالة الثانية هي اعتبار التأثير الحراري للتيار الكهربائي.

١- ٤- ١ القيمة المتوسطة للموجة الجيبية Average value of sine wave

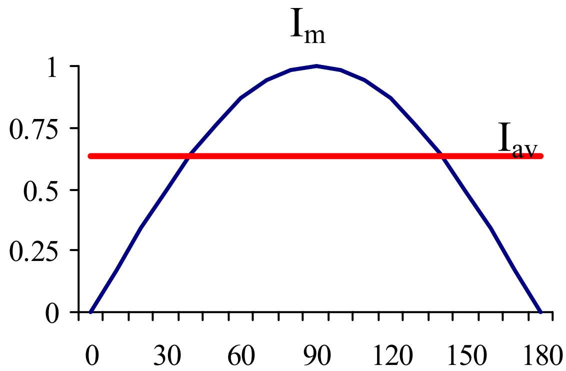
في الحالة الأولى: إذا نظرنا إلى دورة من الدورات الجيبية ولو حسبنا الشحنة الكهربائية المارة في مقطع سلك ما يحمل تيارا جيبيا وذلك في زمن الدورة الواحدة (T)، لوجدنا أن محصلة الشحنة الكهربائية = صفر. حيث إن الشحنة الموجبة المارة في زمن T/2 تساوي الشحنة السالبة المارة في النصف الآخر من الدورة، ويمكن حساب كل من الشحنة الموجبة والشحنة السالبة على حدة باعتبار الزمن T/2 فقط وبالتالي يمكن حساب القيمة المتوسطة لنصف الدورة كما هو مبين بشكل (١- ٧)، على أنه: التيار المستمر الذي إذا مر في مقاومة ما في زمن T/2 تتسبب في مرور نفس الشحنة التي يسببها التيار المتردد في نفس الزمن.

$$\pi I_{av} = \int_0^{\pi} I_m \sin\theta d\theta = -I_m[\cos(\pi) - \cos(0)] = 2I_m \qquad (١-١٥)$$

$$I_{av} = \frac{2}{\pi} I_m \qquad (١-١٦)$$

وبالطبع فإن التيار المتوسط للدورة كلها = صفر

$$I_{av} = (\frac{1}{2\pi})\int I_m \sin\theta = -I_m[\cos(0) - \cos(2\pi)] = 0 \qquad (١٧-١)$$

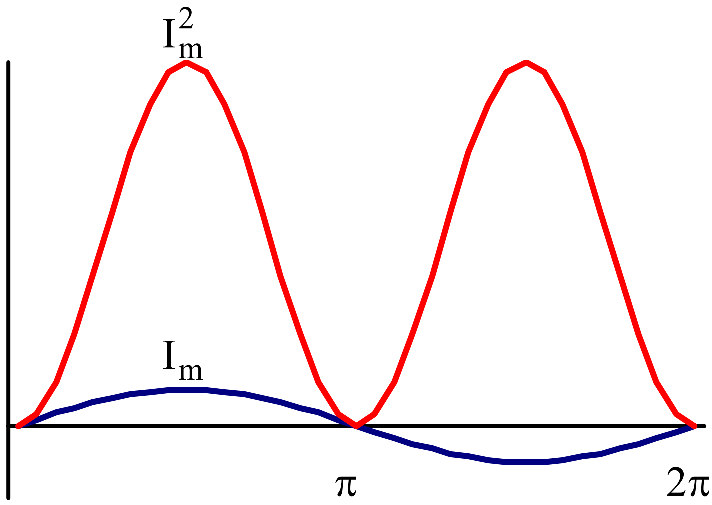


شكل (١- ٧) القيمة المتوسطة لنصف الموجة الجيبية

١- ٤- ٢ القيمة الفعالة للموجة الجيبية Effective value of sine wave (R.M.S.)

في الحالة الثانية: حيث ندرس التأثير الحراري للتيار الكهربائي، فلو تخيلنا مثلاً أن التيار يضيء مصباحاً كهربائياً، فإن هذا المصباح يشع حرارة ويضيء في نفس الوقت، هذا بالطبع دون تفرقة ما إذا كانت القطبية سالبة أو موجبة ولهذا تعرف القيمة الفعالة للتيار المتردد بأنها قيمة التيار المستمر التي إذا مرت في دائرة ما لفترة زمنية ما فإنها تعطي نفس التأثير الحراري للتيار المتردد إذا مر في نفس الدائرة لنفس الزمن. ويمكن إضافة التعريف العلمي الفيزيائي للقيمة الفعالة وهي القيمة للجهد أو التيار الذي يسبب نفس استهلاك الطاقة لو كان جهداً مستمراً، وتسمى r.m.s وهي اختصار للكلمات root mean square وهذه الكلمات تصف تماماً الخطوات المتخذة لحساب القيمة الفعالة للتيار المتردد ذي الموجة الجيبية الموصوف بالمعادلة: $i = I_m \sin\theta$ كما يلي:

(١) للتخلص من تأثير القطبية، تربع معادلة التيار لتصبح: $i^2 = (I_m \sin\theta)^2$ (square)، كما هو مبين بشكل (١- ٨).



شكل (١- ٨) تربيع الموجة الجيبية

(٢) يتم التكامل على كل الموجة أو نصف الموجة ليس هناك اختلاف حيث إن تربيع الموجة يلغي تأثير هذا الاختلاف، ثم تجرى عملية قسمة على الفترة الزمنية التي أجري عليها التكامل (mean):

$$\frac{1}{\pi}\int\left(I_m^2 - \sin^2\theta\right) = \left(\frac{I_m^2}{\pi}\right)\int\frac{(1-\cos 2\theta)}{2} = \frac{I_m^2}{2} \qquad (١٨\text{-}١)$$

(٣) يؤخذ الجذر التربيعي للحصول على القيمة الفعالة (root):

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (١٩\text{-}١)$$

إذن لحساب القيمة الفعالة (root mean square) أو اختصارا (rms):

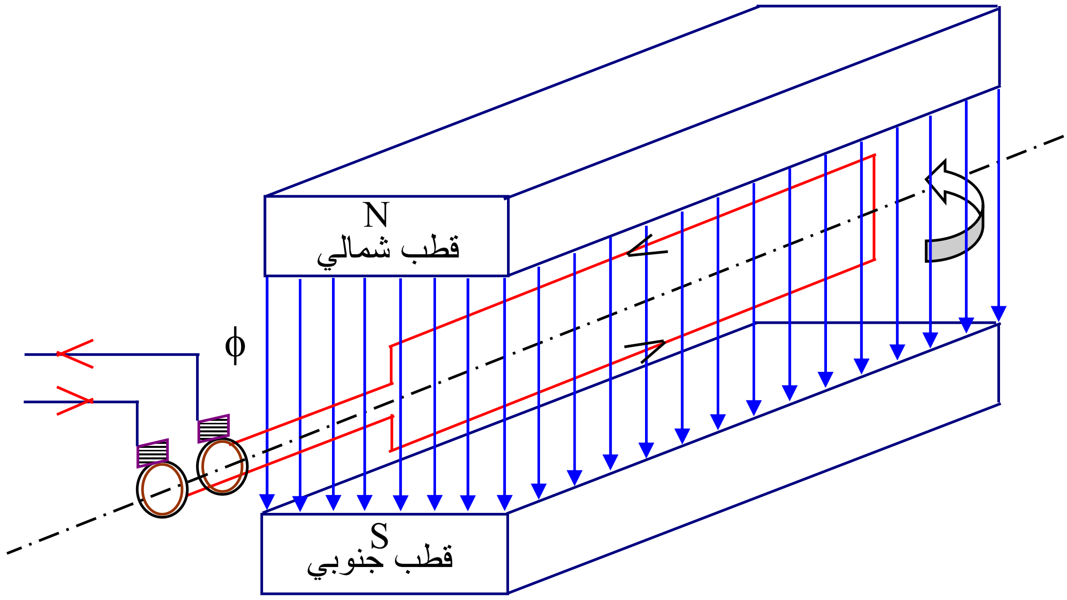
$$I_{eff} = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{\pi}\right)\int I_m^2 \sin^2\theta\right)} \qquad (٢٠\text{-}١)$$

١- ٥ زاوية الطور **Phase angle**

زاوية الطور هي الزاوية بين التيار المتولد ومصدر التغذية وتتوقف قيمتها على العناصر المكونة للدائرة من مقاومات وملفات ومكثفات وسوف نورد أمثلة توضح حساب قيمة الزاوية.

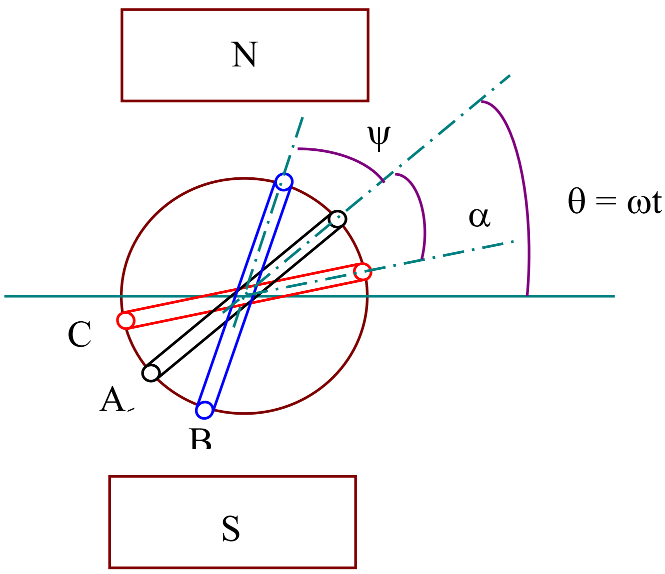
وبالعودة إلى شكل (١- ٥) ولتكملة الفكرة عن توليد التيار المتردد وبعد الحديث عن موصل واحد يمكن الآن أن نتحدث عن لفة كاملة حيث يمكن توصيل اثنين من الموصلات تحت قطبين مختلفين

وبذلك يكمل التيار مساره كما هو موضح بشكل (١- ٩) ثم يخرج التيار إلى خارج الملفات عن طريق اثنين من حلقات الانزلاق واثنين من الفرش.



شكل (١- ٩) مجسم يبين لفة كاملة.

لو فرضنا الآن أن هناك ثلاثة ملفات مشتركة في نفس المحور ولكن يفصل بينهم زوايا ثابتة: ψ & α، كما هو مبين بشكل (١- ١٠)، نجد الآتي:



شكل (١- ١٠) ثلاثة ملفات في أوضاع مختلفة

- نجد أنه بينما تكون معادلة القوة الدافعة الكهربائية في الملف A هي:

$$e_A = Em \sin \omega t \qquad (٢١-١)$$

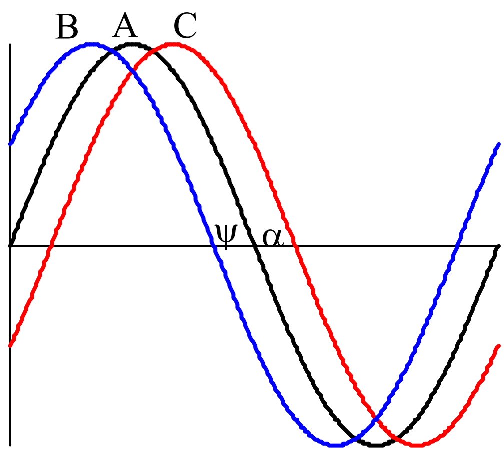
- نجد أنه في الملف B تكون معادلة القوة الدافعة الكهربائية هي:

$$e_B = Em \sin (\omega t+\psi) \qquad (٢٢-١)$$

- نجد أنه في الملف C تكون معادلة القوة الدافعة الكهربائية هي:

$$e_C = Em \sin (\omega t - \alpha) \qquad (٢٣-١)$$

هذا يعني أن الجهود في الثلاثة ملفات متساوية في قيمتها العظمى ولكن الفارق هو أن الملف B يصل إلى قيمته العظمى أولاً ثم بعد زاوية مقدارها ψ يصل الملف A إلى قيمته العظمى ثم بعد زاوية مقدارها α يصل الملف C إلى قيمته العظمى كما هو مبين بشكل (١- ١١).



شكل (١- ١١) الجهد المتولد على الملفات الثلاثة.

وعلى هذا يمكن أن ندرك أن الملفات الموجودة كلها لاتصل في نفس الوقت إلى القيمة العظمى ولكن يفصل بين بعضها البعض زوايا ثابتة ولأن حركة الملفات حركة نسبية فإنه يستلزم هنا لحساب الزوايا، اعتبار أحد هذه الملفات هو المرجع (reference) أو الدليل وينسب إليه باقي الملفات.

فإذا اعتبرنا مثلا الملف A هو المرجع فإن الملفات C،B تنسب إليه وفي هذه الحالة تعتبر زاوية الدليل هي المرجع فتساوي صفراً ، وتنسب الزوايا الأخرى إليها وتسمى هذه الزوايا في هذه الحالة بزوايا الطور:

- يعتبر الملف A هو المرجع، زاوية الطور = صفر:

$$e_A = E_m \sin(\omega t + 0) \qquad (١-٢٤)$$

- تعتبر زاوية الطور زاوية متقدمة إذا كانت إشارتها موجبة مثل:

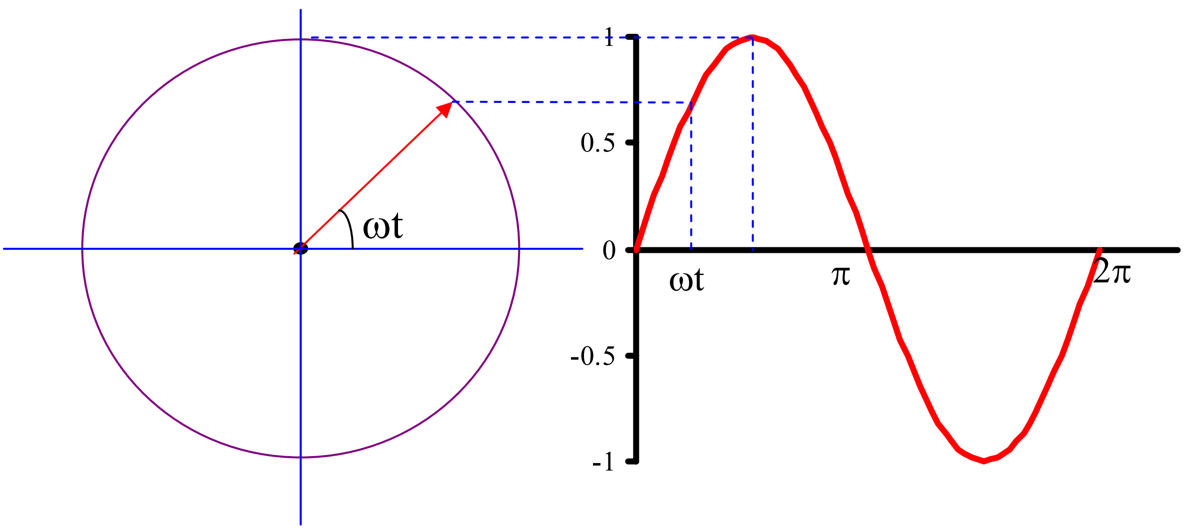
$$e_B = E_m \sin(\omega t + \psi) \qquad (١-٢٥)$$

- تعتبر زاوية الطور زاوية متأخرة إذا كانت إشارتها سالبة مثل:

$$e_C = E_m \sin(\omega t - \alpha) \qquad (١-٢٦)$$

١- ٦ التمثيل الاتجاهي للموجة الجيبية Representation of Sine Wave

يمكن تمثيل الجهد المتغير الذي تمثله الموجة الجيبية بتمثيل آخر مكافئ وهو عبارة عن متجه ثابت القيمة قيمته E_m ويدور بسرعة زاوية ثابتة ω والزاوية المحصورة بين المحور السيني وهذا المتجه هي الزاوية ωt وكذلك إسقاط هذا المتجه على المحور الصادي يمثل القيمة اللحظية للجهد المتغير كما هو مبين بشكل (١- ١٢).



شكل (١- ١٢) التمثيل الاتجاهي للموجة الجيبية.

١- ٦- ١ التمثيل الرياضي للمتجهات Mathematical Representation of Vectors

يمكن تمثيل المتجهات بالطرق الآتية:

١- صيغة الإحداثيات المتعامدة.

٢- الصيغة القطبية.

وفيما يلي سوف نتحدث باختصار عن كل طريقة:

(١) صيغة الإحداثيات المتعامدة:

أية كمية مركبة A يمكن تمثيلها على مستوى أرجاند على هيئة كمية حقيقية مضافة إلى كمية تخيلية كالآتي:

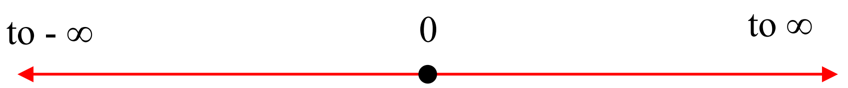
$$A = a_1 + ja_2 \qquad (١-٢٧)$$

حيث j هو وحدة اتجاهية وتعريفه كالآتي:

j : هو متجه مقداره الوحدة وهو ينطبق على المحور الصادي وقيمته = $\sqrt{-1}$

ولشرح هذا المستوى نتخيل الآتي:

تمثل الأعداد الحقيقية كنقط تقع على خط مستقيم يمتد من سالب ما لانهاية إلى ما لانهاية ماراً بالصفر كما هو مبين بشكل (١- ١٣).

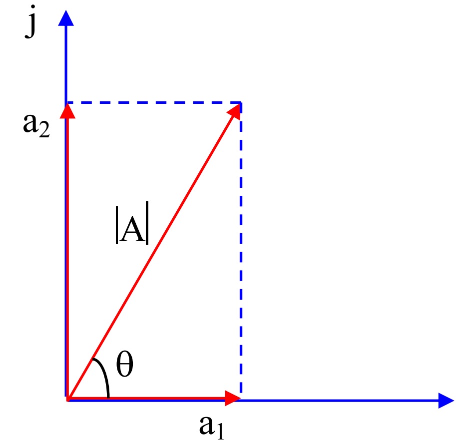


شكل (١- ١٣) تمثيل الأعداد على مستوى أرجاند.

فإذا فرضنا أن من صفر إلى ما لانهاية عبارة عن متجه وليكن X، فبضرب هذا المتجه في j مرتين نحصل على $X \cdot j \cdot j = -X$

وهو المتجه العكسي للمتجه الأول (صفر إلى (– ما لانهاية))

إذن بضرب العدد الصحيح في j مرتين، فإن العدد الصحيح يدور مرتين كل مرة بزاوية مقدارها 90 درجة، وإذا ضرب في j مرة واحدة فإنه يدور مرة واحدة بزاوية مقدارها 90 درجة. لهذا تمثل الكميات الحقيقية على المحور السيني وتمثل الكميات التخيلية على المحور الصادي وتمثل الكميات المركبة على المحورين السيني والصادي كما هو مبين بشكل (١- ١٤).



شكل (١- ١٤) المحور الحقيقي والمحور التخيلي.

$$|A| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} \qquad (١-٢٨)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \qquad (١-٢٩)$$

٢- الصيغة القطبية:

يمكن وصف المتجه أيضاً كمقدار وزاوية:

$$\overline{A} = |A| \angle\theta \qquad (١-٣٠)$$

١- ٦- ٢ بعض المبادئ البسيطة لرياضيات المتجهات Basic Calculations of Vectors

(١) جمع وطرح المتجهات

لو اعتبرنا أن هناك متجهان $\overline{A}, \overline{B}$ وأن المتجه $\overline{C}$ هو حاصل جمعهما وأن المتجه $\overline{D}$ هو الفارق بينهما:

$$\overline{A} = a_1 + ja_2 \qquad (١-٣١)$$

$$\overline{B} = b_1 + jb_2 \qquad (١-٣٢)$$

$$\overline{C} = c_1 + jc_2 \qquad (١-٣٣)$$

$$\overline{D} = d_1 + jd_2 \qquad (١-٣٤)$$

$$\overline{C} = \overline{A} + \overline{B} \qquad (١-٣٥)$$

$$\overline{D} = \overline{A} - \overline{B} \qquad (١-٣٦)$$

$$c_1 + jc_2 = a_1 + ja_2 + b_1 + jb_2 = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) \qquad (١-٣٧)$$

$$d_1 + jd_2 = (a_1 + ja_2) - (b_1 + jb_2) = (a_1 - b_1) + j(a_2 - b_2) \qquad (١-٣٨)$$

$$c_1 = a_1 + b_1$$

(١-٣٩)

$$c_2 = a_2 + b_2 \quad (١-٤٠)$$

$$d_1 = a_1 - b_1 \quad (١-٤١)$$

$$d_2 = a_2 - b_2 \quad (١-٤٢)$$

$$|C| = \sqrt{[(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2]} \quad (١-٤٣)$$

$$\theta_C = \tan^{-1}\frac{(a_2 + b_2)}{(a_1 + b_1)} \quad (١-٤٤)$$

$$|D| = \sqrt{[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]} \quad (١-٤٥)$$

$$\theta_d = \tan^{-1}\frac{(a_2 - b_2)}{(a_1 - b_1)} \quad (١-٤٦)$$

(٢) ضرب وقسمة المتجهات

يجب هنا أن ننوه أن في حالة الضرب والقسمة، فإن استخدام الصيغة القطبية هي الأسهل في التعامل كثيراً عمن سواها.

نفترض أن C هو حاصل ضرب $B \cdot A$:

$$C = A \cdot B = (a_1 + ja_2)\cdot(b_1 + jb_2) \quad (١-٤٧)$$

$$= (a_1b_1 - a_2b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \quad (١-٤٨)$$

$$|C| = \sqrt{[(a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2]} \quad (١-٤٩)$$

$$\theta_C = \tan^{-1}\frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{(a_1b_1 - a_2b_2)} \quad (١-٥٠)$$

في حين أن استخدام الصورة القطبية تسهل كثيراً من عمليات الحل:

$$\overline{C} = \overline{A}\cdot\overline{B} = |A|\angle\theta_A \cdot |B|\angle\theta_B = |C|\angle\theta_C$$

(١-٥١)

$$|C| = |A| \cdot |B| \qquad (١-٥٢)$$

$$\angle\theta_C = \angle\theta_a + \angle\theta_b \qquad (١-٥٣)$$

وكذلك في حالة القسمة:

$$\overline{D} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} \qquad (١-٥٤)$$

$$|D| = \frac{|A|}{|B|} \qquad (١-٥٥)$$

$$\angle\theta_d = \angle\theta_a - \angle\theta_b \qquad (١-٥٦)$$

تدريبات على الوحدة الأولى

أولاً: الأسئلة:

(أ) بين كيفية توليد التيار المتردد

(ب) استنتج القيمة المتوسطة لكل من الموجة الجيبية الكاملة ونصف الموجة الجيبية

(ت) استنتج القيمة الفعالة للجهد الكهربائي الذي على شكل الموجة الجيبية

(ث) ارسم رسماً تخطيطياً يبين التمثيل الاتجاهي للموجة الجيبية

(ج) اذكر الصيغ الشهيرة لتمثيل المتجهات رياضياً.

ثانياً: التمارين:

١. اجمع المتجهات الآتية:

(أ) $\overline{A} = 6 - j8, \quad \overline{B} = 8 - j6$

(ب) $\overline{A} = 6 - j8, \quad \overline{B} = 8 + j6$

(ت) $\overline{A} = 6 + j8, \quad \overline{B} = 8 - j6$

(ث) $\overline{A} = 6 + j8, \quad \overline{B} = 8 + j6$

(ج) $\overline{K} = 6 - j8, \quad \overline{L} = -8 + j6$

٢. للمتجهات الآتية احسب $\overline{A} - \overline{B}$:

(أ) $\overline{A} = 6 - j8, \quad \overline{B} = 8 - j6$

(ب) $\overline{A} = 6 - j8, \quad \overline{B} = 8 + j6$

(ت) $\overline{A} = 6 + j8, \quad \overline{B} = 8 - j6$

(ث) $\overline{A} = 6 + j8, \quad \overline{B} = 8 + j6$

(ج) $\overline{A} = 6 - j8, \quad \overline{B} = -8 + j6$

٣. حول المتجهات الآتية إلى الصورة القطبية:

(أ) $\overline{A} = 6 - j8$

(ب) $\overline{B} = 8 + j6$

(ت) $\overline{B} = 8 - j6 \quad \overline{A} = 6 + j8$

(ث) $\overline{A} = -6 - j8$

(ج) $\overline{B} = -8 - j6$

٤. حول المتجهات الآتية إلى صورة الإحداثيات المتعامدة:

(أ) $\overline{A} = 10 \angle 30^\circ$

(ب) $\overline{A} = 10 \angle -30°$

(ت) $\overline{A} = 10 \angle 60°$

(ث) $\overline{A} = 10 \angle -60°$

(ج) $\overline{A} = 10 \angle 36.87°$

٥. احسب حاصل ضرب المتجهات الآتية:

(أ) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle -30°$

(ب) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle 60°$

(ت) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle 0°$

(ث) $\overline{A} = 10 \angle 0°, \overline{B} = 10 \angle 0°$

(ج) $\overline{A} = 10 \angle 120°, \overline{B} = 10 \angle -60°$

٦. للمتجهات الآتية احسب $\frac{\overline{A}}{\overline{B}}$:

(أ) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle -30°$

(ب) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle 60°$

(ت) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle 0°$

(ث) $\overline{A} = 10 \angle 0°, \overline{B} = 10 \angle 0°$

(ج) $\overline{A} = 10 \angle 120°, \overline{B} = 10 \angle -60°$

٧. للمتجهات الآتية، احسب $\frac{\overline{B}}{\overline{A}}$:

(أ) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle -30°$

(ب) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle 60°$

(ت) $\overline{A} = 10 \angle 30°, \overline{B} = 10 \angle 0°$

(ث) $\overline{A} = 10 \angle 0°, \overline{B} = 10 \angle 0°$

(ج) $\overline{A} = 10 \angle 120°, \overline{B} = 10 \angle -60°$

هندسة كهربائية - ٢

دراسة عناصر دوائر التيار المتردد

الأهداف العامة للوحدة الثانية

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة، يكون المتدرب قادرا على معرفة:

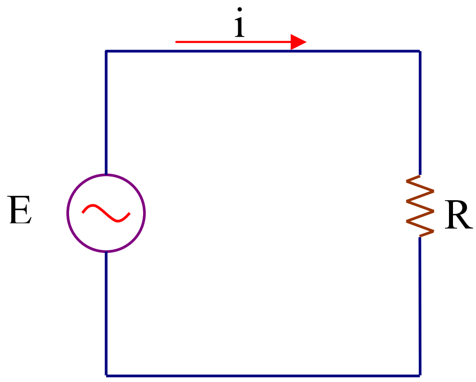
- عنصر المقاومة الأومية، قيمة الجهد، والتيار والقدرة.
- الملف كعنصر فعال في الدائرة الكهربائية، قيمة الجهد، والتيار والقدرة.
- المكثف كعنصر فعال في دوائر التيار المتردد، قيمة الجهد، والتيار والقدرة.

٢- ١ المقدمة:

في هذه الوحدة، سوف نتناول بالتفصيل تحليل عناصر دوائر التيار المتردد، المقاومات والملفات والمكثفات وتركيباتها وتوصيلاتها.

٢- ٢ عناصر دوائر التيار المتردد Basic Elements of A.C Circuits

٢- ٢- ١ عنصر المقاومة الأومية The Resistance



شكل (٢- ١) عنصر المقاومة الأومية في الدائرة الكهربائية.

في الدائرة المبينة بشكل (٢- ١)، حيث مصدر جهد متردد يغذي مقاومة أومية فقط وعلى اعتبار مصدر الجهد ذي موجة جيبية يمثل الصورة:

$$E = E_m \sin \omega t \qquad (٢\text{-}١)$$

وبتطبيق قانون أوم:

$$E = E_m \sin \omega t = i \cdot R \qquad (٢\text{-}٢)$$

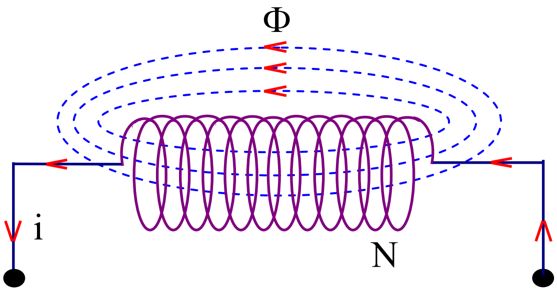
$$i = \left(\frac{E_m}{R}\right) \sin \omega t = I_m \sin \omega t \qquad (٢\text{-}٣)$$

$$i = I_m \sin \omega t \qquad (٢\text{-}٤)$$

يلاحظ من المعادلتين (٢- ١) و (٢- ٤) أن التيار والجهد لا يوجد بينهما أي اختلاف في زاوية الطور، أي أنهما في نفس الطور معا أو متطابقان في زاوية الطور.

٢- ٢- ٢ عنصر المفاعلة الحثية للملف The Inductive Reactance

وجد أنه إذا مر تيار متردد في ملف، كما هو مبين بشكل (٢- ٢)، فإنه تتولد خطوط قوى مغناطيسية Φ متغيرة مع الزمن وذلك لأن التيار متغير مع الزمن، ووجد أن حاصل ضرب هذه الخطوط Φ في عدد لفات الملف N تتناسب مع شدة التيار i، كما يلي:



شكل (٢- ٢) المجال المغناطيسي المتولد عن الملف.

$$N\phi \propto i \qquad (٢-٥)$$

$$N\phi = Li \qquad (٢-٦)$$

حيث يسمى ثابت التناسب بمعامل الحث الذاتي للملف L ويقاس بوحدة الهنري (Henry).

وبتطبيق قانون فاراداي:

$$E = -N\frac{d\phi}{dt} \qquad (٢-٧)$$

$$\because N\phi = Li \qquad (٢-٨)$$

$$\therefore N\frac{d\phi}{dt} = L\frac{di}{dt} \qquad (٢-٩)$$

$$\therefore E = -N\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \qquad (٢-١٠)$$

فإذا كان التيار المار في الملف: $i = I_m \sin(\omega t)$

إذن:

$$E=-L\frac{d}{dt}\cdot\left(I_m\cdot\sin(\omega t)\right) \quad (٢-١١)$$

$$E=-L\cdot I_m\cdot\omega\cdot\cos(\omega t) \quad (٢-١٢)$$

$$E=-I_m\cdot\omega\cdot L\cdot\sin(\omega t+90)=E_m\cdot\sin(\omega t+90) \quad (٢-١٣)$$

$$\frac{E_m}{I_m}=\omega\cdot L \quad (٢-١٤)$$

يتضح من هذه المعادلات أن الملف الحثي له ما يشبه المقاومة في تعاملها (قانون أوم) حيث تسمى ωL في هذه الحالة المفاعلة الحثية (Inductive Reactance)، وتقاس بوحدة الأوم (Ω)،

ويلاحظ أن: $\omega L = 2\pi f L$

و يتضح كذلك من المعادلات أنه في حالة الملف الحثي، فإن الجهد E يسبق التيار i بزاوية قدرها 90 درجة.

ويلاحظ أن قيمة المفاعلة دالة في التردد أي تتوقف قيمتها على قيمة التردد (في حالة وجود مصدر تغذية DC نجد أن قيمة المفاعلة الحثية للملف تساوي صفراً، حيث لايوجد تردد أو قيمة $f = 0$) حيث:

$$\omega L = 2\pi f\cdot L \quad (٢-١٥)$$

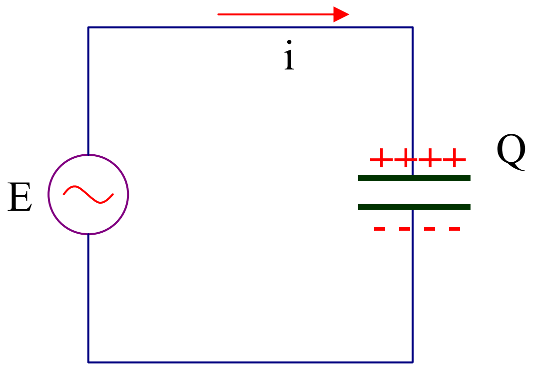
٢- ٢- ٣ عنصر المفاعلة السعوية للمكثف The Capacitive Reactance

وجد أنه بوضع لوحين من المعدن في مواجهة بعضهما البعض ويفصل بينهما مسافة بها عازل، و تم توصيل مصدر للجهد بين هذين اللوحين كما هو مبين بشكل (٢- ٣)، فإن شحنة كهربائية تتكون على هذين القطبين، وتتناسب مع الجهد المطبق بينهما. أي أن:

$$Q\propto V \quad (٢-١٦)$$

$$Q=CV \quad (٢-١٧)$$

يسمى هذا النظام بالمكثف ويسمى ثابت التناسب C بسعة المكثف، وتقاس السعة بوحدات الفاراد Farad .



شكل (٢- ٣) عنصر المكثف في الدائرة الكهربائية.

٢- ٢- ٣- ١ المكثف كعنصر فعال في دوائر التيار المتردد

وجد أنه إذا كان الجهد المطبق على المكثف جهدا متردداً، فإن الشحنة المتكونة تتغير من لوح لآخر حسب قطبية الجهد المطبق ويستمر شحن المكثف و تفريغه، وهذا يعني أن التيار يسري بين اللوحين حسب العلاقة الآتية:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} \qquad (٢-١٨)$$

وهكذا إذا كان الجهد المطبق على المكثف: $v = V_m \sin \omega t$ ، فإن التيار الذي يسري بين اللوحين هو:

$$i = C\frac{dv}{dt} = C \cdot V_m \cdot \frac{d}{dt}(\sin \omega t) \qquad (٢-١٩)$$

$$i = C \cdot V_m \cdot \omega \cdot \cos \omega t = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + 90) \qquad (٢-٢٠)$$

وعلى ذلك يكون التيار على الصورة:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + 90) \qquad (٢-٢١)$$

حيث:

$$I_m = V_m \cdot \omega C \qquad (٢-٢٢)$$

وعلى ذلك يكون:

$$\frac{V_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}$$

(٢-٢٣)

إذن هناك مفاعلة تشبه المقاومة في تعاملها (قانون أوم)، حيث تسمى $\frac{1}{\omega C}$ في هذه الحالة بالمفاعلة السعوية (Capacitive Reactance)، وتقاس بوحدة الأوم (Ω)، ويلاحظ أن:

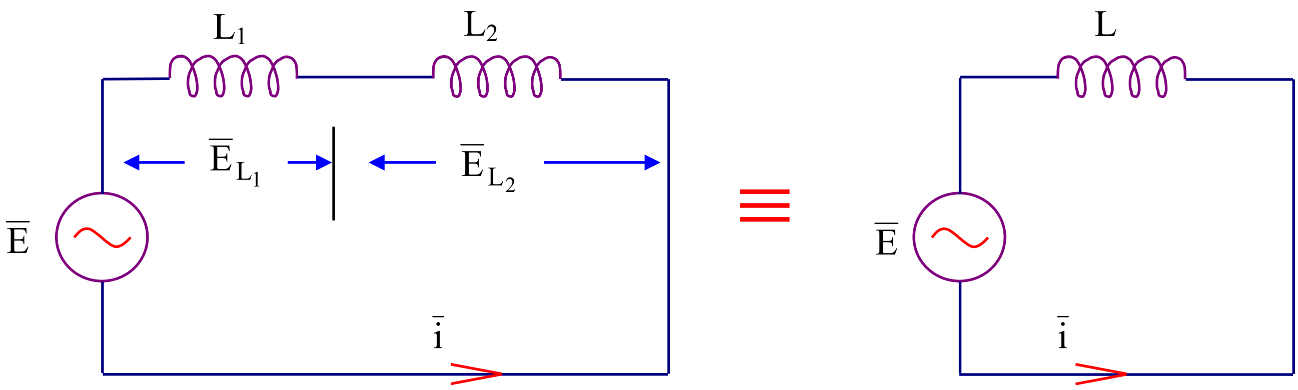
$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \qquad (٢-٢٤)$$

في هذه الحالة يكون التيار متقدماً على الجهد أي يسبق الجهد بزاوية قدرها $90°$.

٢- ٣ التوصيل على التوالي

٢- ٣- ١ توصيل الملفات على التوالي

توضح الدائرة الكهربائية في شكل (٢- ٤) كيفية توصيل ملفين على التوالي، ويمكن حساب المفاعلة المكافئة X_L كالتالي:



شكل (٢- ٤) المفاعلة المكافئة لملفين موصلين على التوالي

$$X_L = j\omega L = j\omega L_1 + j\omega L_2 = j\omega (L_1 + L_2) \qquad (٢-٢٥)$$

$$\therefore L = (L_1 + L_2) \qquad (٢-٢٦)$$

وهذا يوضح أن توصيل الملفات على التوالي يماثل توصيل المقاومات على التوالي، حيث إن محصلة توصيل ملفين على التوالي هو حاصل جمعهما.

مثال (٢- ١)

احسب قيمة معامل الحث الذاتي المحصلة لملفين متصلين على التوالي إذا كانت قيمة أحدهما 5 mH وقيمة الآخر 7 mH .

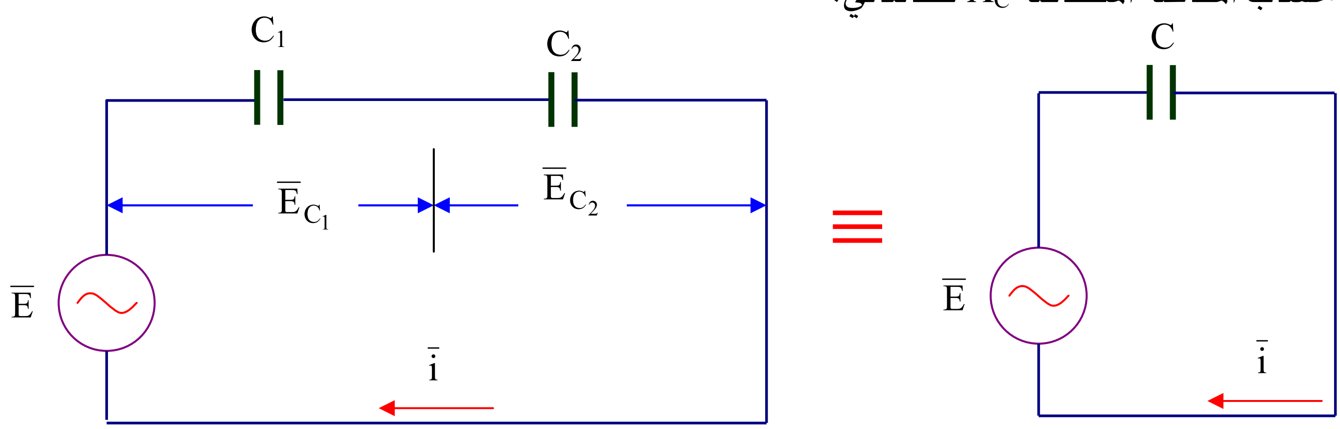
الحل

يمكن حساب قيمة معامل الحث الذاتي المحصلة كما يلي:

$$\therefore L = (L_1 + L_2) = 5\text{ mH} + 7\text{ mH} = 12\text{ mH}$$

٢-٣-٢ توصيل المكثفات على التوالي

توضح الدائرة الكهربائية في شكل (٢-٥) كيفية توصيل مكثفين على التوالي، ويمكن حساب المفاعلة المكافئة X_C كالتالي:



شكل (٢-٥) المفاعلة المكافئة لمكثفين موصلين على التوالي

$$X_C = -j\left(\frac{1}{\omega C}\right) = \left(-j\frac{1}{\omega C_1}\right) + \left(-j\frac{1}{\omega C_2}\right) = -j\left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}\right) \quad (٢\text{-}٢٧)$$

أي أن:

$$\left(\frac{1}{C}\right) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \quad (٢\text{-}٢٨)$$

$$C = \left(\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}\right) \quad (٢\text{-}٢٩)$$

من المعادلة (٢-٢٩) يتضح أن توصيل المكثفات على التوالي يماثل توصيل المقاومات على التوازي.

مثال (٢-٢)

احسب قيمة السعة المحصلة لمكثفين متصلين على التوالي إذا كانت قيمة أحدهما 100 μF وقيمة الآخر 25 μF.

الحل

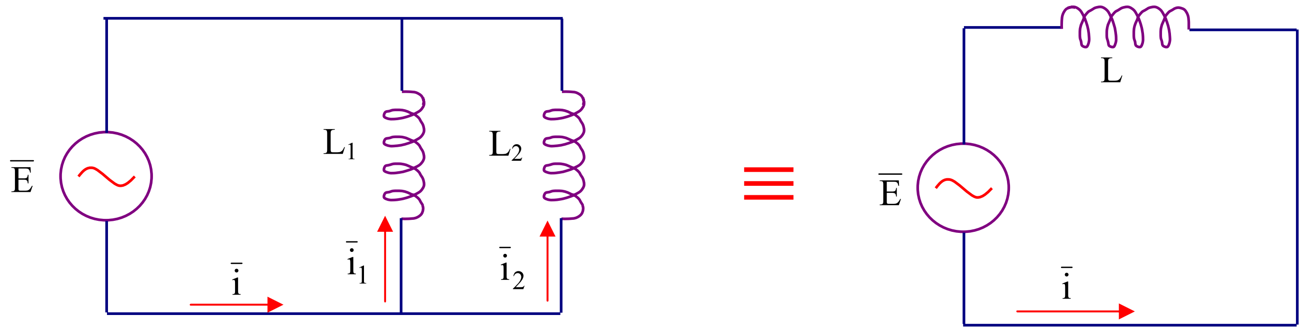
طبقاً للمعادلة (٢- ٢٩)، يمكن حساب قيمة معامل السعة المحصلة كما يلي:

$$C = \left(\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}\right) = \frac{100\ \mu F \cdot 25\ \mu F}{100\ \mu F + 25\ \mu F} = 20\ \mu F$$

٢- ٤ التوصيل على التوازي

٢- ٤- ١ توصيل الملفات على التوازي

توضح الدائرة الكهربائية في شكل (٢- ٦) كيفية توصيل ملفين على التوالي، ويمكن حساب المفاعلة المكافئة X_L كالتالي:



شكل (٢- ٦) المفاعلة المكافئة للملفين موصلين على التوازي

لحساب التيار في دائرة المفاعلة المكافئة، نحصل على الآتي:

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{j\omega L} \qquad (٣٠-٢)$$

لحساب التيار في دائرة الملفين المتوازيين، نحصل على الآتي:

$$\bar{i} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 = \frac{\bar{E}}{j\omega L_1} + \frac{\bar{E}}{j\omega L_2} = \bar{E} \cdot \left(\frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2}\right) \qquad (٣١-٢)$$

لحساب المفاعلة المكافئة، نحصل على الآتي:

$$X_L = \frac{\bar{E}}{\bar{i}} = j\omega L \qquad (٣٢-٢)$$

$$X_L = \frac{\bar{E}}{\bar{i}} = \frac{\bar{E}}{\bar{E} \cdot \left(\frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2}\right)} \qquad (٣٣-٢)$$

وبمساواة المفاعلة في الحالتين، نحصل على الآتي:

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2} \qquad (٢-٣٤)$$

$$\therefore L=(\frac{L_1 \cdot L_2}{L_1+L_2}) \qquad (٢-٣٥)$$

وهذا يوضح أن توصيل الملفات على التوازي يماثل توصيل المقاومات على التوازي، حيث أن محصلة توصيل ملفين على التوازي هو حاصل ضربهما مقسوماً على حاصل جمعهما.

مثال (٢- ٣)

احسب قيمة معامل الحث الذاتي المحصلة لملفين متصلين على التوازي إذا كانت قيمة أحدهما 5 mH وقيمة الآخر 7 mH .

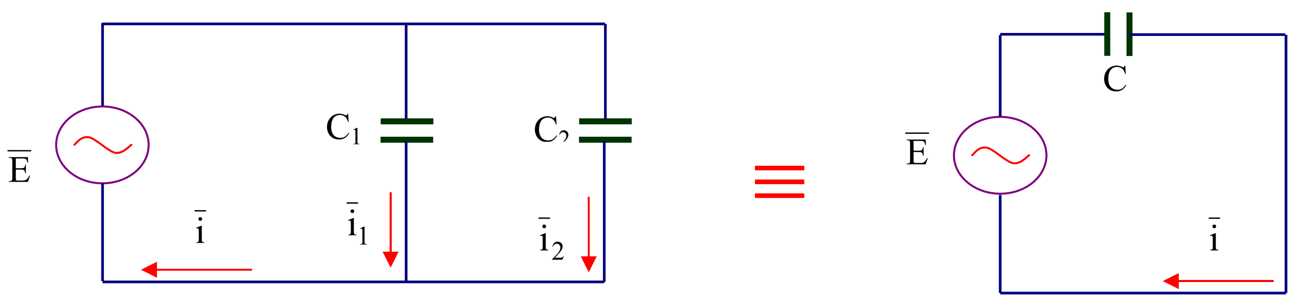
الحل

طبقاً للمعادلة (٢- ٣٥)، يمكن حساب قيمة معامل الحث الذاتي المحصلة، كالآتي:

$$\therefore L=(\frac{L_1 \cdot L_2}{L_1+L_2})=\frac{5\text{ mH}\times 7\text{ mH}}{5\text{ mH}+7\text{ mH}}=2.92\text{ mH}$$

٢- ٤- ٢ توصيل المكثفات على التوازي

توضح الدائرة الكهربائية التالية، توصيل مكثفين على التوازي، ويمكن حساب المفاعلة المكافئة X_C كالتالي:



شكل (٢- ٧) توصيل مكثفين على التوالي

لحساب التيار في دائرة المفاعلة المكافئة، نحصل على الآتي:

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{(1/j\omega C)} = \bar{E}\cdot j\omega C \qquad (٢-٣٦)$$

لحساب التيار في دائرة المكثفين المتوازيين، نحصل على الآتي:

$$\bar{i} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 = \frac{\bar{E}}{(1/j\omega C_1)} + \frac{\bar{E}}{(1/j\omega C_2)} = \bar{E}\cdot j\omega C_1 + \bar{E}\cdot j\omega C_2 \qquad (٢-٣٧)$$

وبمساواة التيار في الحالتين، نحصل على الآتي:

$$\bar{i} = \bar{E}\cdot j\omega C_1 + \bar{E}\cdot j\omega C_2 = \bar{E}\cdot j\omega C \qquad (٢-٣٨)$$

بقسمة الطرفين على $j\,\omega\,\bar{E}$ ، نحصل على الآتي:

$$C = C_1 + C_2 \qquad (٢-٣٩)$$

من المعادلة (٢- ٣٩) يتضح توصيل المكثفات على التوازي يماثل توصيل المقاومات على التوالي.

مثال (٢- ٤)

احسب قيمة السعة المحصلة لمكثفين متصلين على التوازي إذا كانت قيمة أحدهما 100 μF وقيمة الآخر 25 μF .

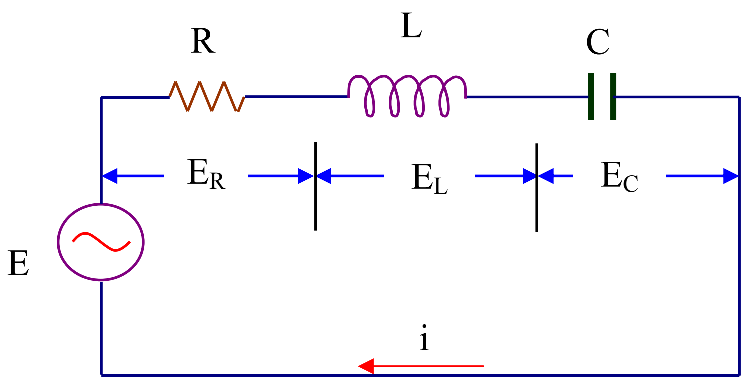
الحل

طبقاً للمعادلة (٢- ٣٩) يمكن حساب قيمة معامل السعة المحصلة كما يلي:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 100\,\mu F + 25\,\mu F = 125\,\mu F$$

٢- ٥ استخدام الأعداد المركبة في الدائرة الكهربائية Complex Numbers in Electrical Circuits

نفترض أن تياراً مقداره i مر في مقاومة R متصلة على التوالي مع ملف ذي معامل حث ذاتي L ومكثف ذي سعة C، كما هو موضح بشكل (٢- ٨).



شكل (٢- ٨) R، L، C على التوالي في دائرة كهربائية.

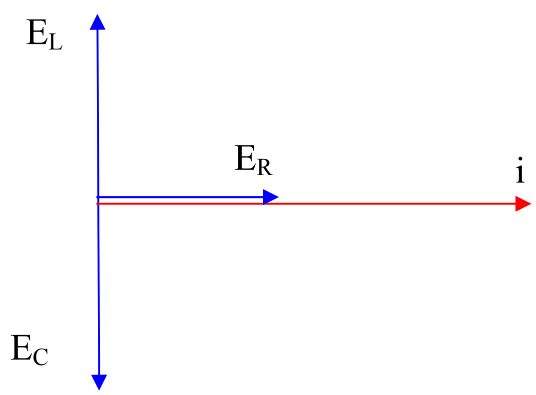
نفرض أن:

فرق الجهد على R هو: $E_r = i \cdot R$ ، ويقاس بوحدة الفولت (volt).

فرق الجهد على L هو: $E_L = i \cdot \omega L$ ، ويقاس بوحدة الفولت (volt)

فرق الجهد على C هو: $E_C = \dfrac{i}{\omega C}$ ، ويقاس أيضاً بوحدة الفولت (volt)

فإذا اعتبرنا أن التيار المار بالدائرة هو الدليل (لأنه يسري في العناصر الثلاثة، حيث قيمة التيار ثابته)، نجد أن: $E_L = i(\omega L)$ ، يتقدم بزاوية $90°$ على التيار i كما هو موضح بشكل (٢- ٩)، أي أنه يمكن استخدام المعامل j لإعادة كتابة المعادلة كالآتي:



شكل (٢- ٩) علاقات متجهات الجهد على المقاومة والملف والمكثف في دائرة التوالي.

$$E_L = j\omega L \cdot i \qquad (٢-٤٠)$$

حيث بضرب التيار i في $j\omega L$ يدور هذا المتجه بمقدار 90° فيصل إلى E_L وكذلك بضرب التيار i في $-j/\omega C$ يدور هذا المتجه بمقدار 90°- ليصل إلى E_C.

وبالتالي يمكن كتابة معادلة مكونات الدائرة الكهربائية السابقة كالآتي:

$$R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad (٢-٤١)$$

تسمى هذه التركيبة من مقاومات ومفاعلات بالمعاوقة ويرمز لها بالرمز Z ويرمز للمفاعلة بالرمز X ويرمز للمقاومة بالرمز R.

$$\overline{Z} = R + jX \qquad (٢-٤٢)$$

وهكذا يمكن حساب كل من قيمة وزاوية المعاوقة Z كالتالي:

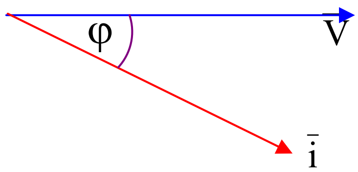
$$|Z| = \sqrt{(R^2 + X^2)} \qquad (٢-٤٣)$$

$$\theta_Z = \tan^{-1}\frac{X}{R} \qquad (٢-٤٤)$$

٢- ٦ القدرة في دوائر التيار المتردد Power in A.C Circuits

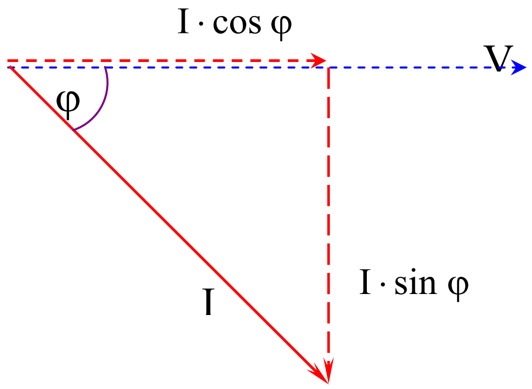
٢- ٦- ١ مثلث القدرة **Power Triangle**

بما أن كلاً من الجهد والتيار في دوائر التيار المتردد هي كميات اتجاهية، ويمكن التعامل معها على أنها متجهات، وقد شرحنا كيف يسبق الجهد التيار في بعض الأحيان (Voltage lead) كما أنه في أحيان أخرى يسبق التيار الجهد(Current lead) ويمكن أيضاً أن يكون كل من الجهد والتيار في نفس الحالة أو نفس زاوية الطور فلا يسبق أي منهما الآخر (in-phase)، وعلى وجه العموم هناك زاوية تفصل بين الجهد والتيار تسمى زاوية φ كما هو مبين بشكل (٢- ١٠).



شكل (٢- ١٠) زاوية الطور بين الجهد والتيار.

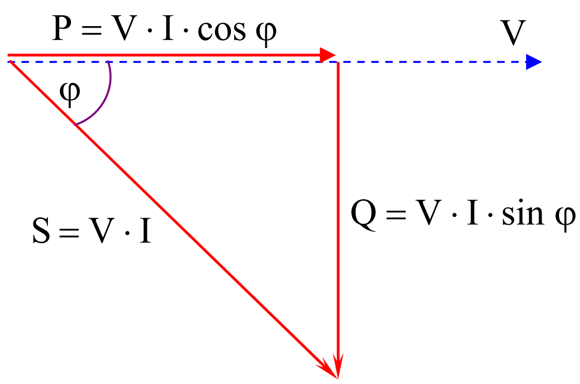
ويمكن بالتالي تحليل التيار I إلى مركبتين: مركبة في اتجاه الجهد = $I \cdot \cos \varphi$ ومركبة عمودية على اتجاه الجهد = $I \cdot \sin \varphi$ كما هو مبين بشكل (٢- ١١).



شكل (٢- ١١) القيمة الفعالة والقيمة غير الفعالة للتيار.

تسمى مركبة التيار التي في اتجاه الجهد بالمركبة الفعالة للتيار، أما مركبة التيار العمودية على اتجاه الجهد فتسمى المركبة غير الفعالة للتيار.

وبضرب كل قيمة من قيم التيار ومركباته في الجهد V نحصل على المثلث المبين في شكل (٢- ١٢).



شكل (٢- ١٢) مثلث القدرة

ويسمى هذا المثلث : مثلث القدرة، حيث كل ضلع من أضلاع المثلث يمثل قدرة كهربائية ما على النحو التالي:

(١) القدرة الظاهرية (S): Apparent Power:

$$S = V \cdot I \qquad (٢-٤٥)$$

(٢) القدرة الفعالة (P): Active Power:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi \qquad (٢-٤٦)$$

(٣) القدرة غير الفعالة (Q): Reactive Power:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin\varphi \qquad (٢-٤٧)$$

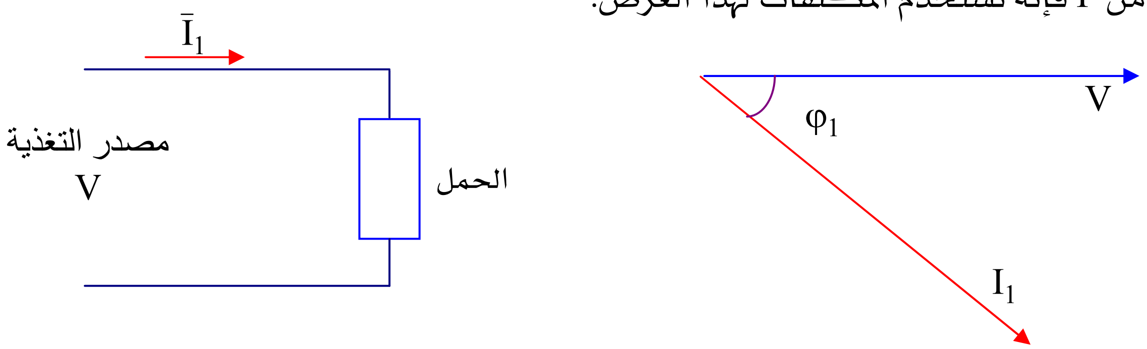
٢- ٦- ٢ معامل القدرة Power Factor

معامل القدرة هو النسبة بين القدرة الفعالة والقدرة الظاهرية وهو بهذا يعادل $\cos\varphi$ ، أو جيب تمام الزاوية φ الواقعة ما بين الجهد والتيار.

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \qquad (٢-٤٨)$$

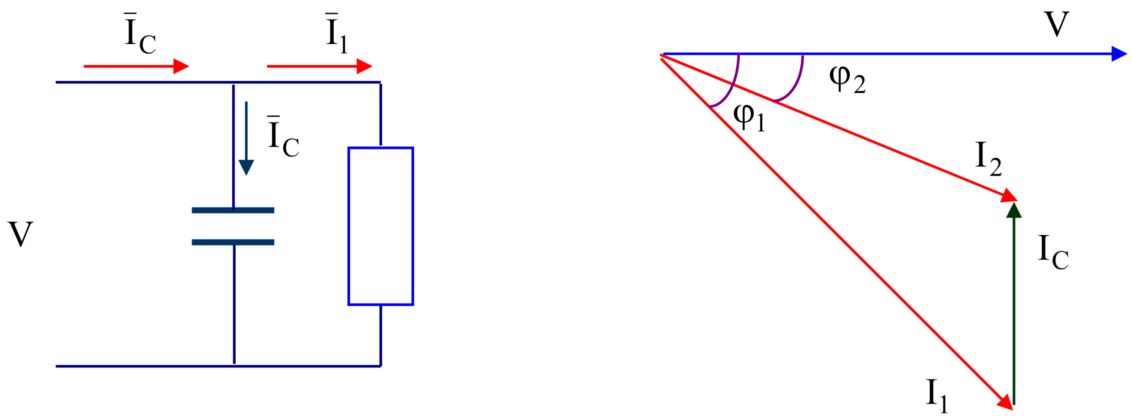
٢- ٦- ٣ تحسين معامل القدرة Power Factor Correction

في معظم الأحمال المنزلية والصناعية المعتادة يكون التيار الكلي متأخراً عن الجهد (Current lag.) كما هو مبين بشكل (٢- ١٣)، ولو نظرنا إلى مثلث القدرة لوجدنا أن القدرة الظاهرية S تمثل القدرة الكلية للحمل والقدرة الفعالة P تمثل القدرة المستفادة بالفعل. والقدرة غير الفعالة Q هي قدرة غير مستفاد منها للمستهلك، وعلى هذا فإنه من المستحسن أن تكون S قريبة من P بمعنى أن تكون القدرة المستفادة أكبر ما يمكن، وبالتالي القدرة غير الفعالة أقل ما يمكن. وهذا يعني تصغير الزاوية φ وبالتالي تكبير $\cos\varphi$ أو ما يسمى بمعامل القدرة وهذا هو ما نطلق عليه تحسين معامل القدرة. ولتقريب S من P فإنه تستخدم المكثفات لهذا الغرض.



شكل (٢- ١٣) الدائرة الكهربائية قبل توصيل المكثفات.

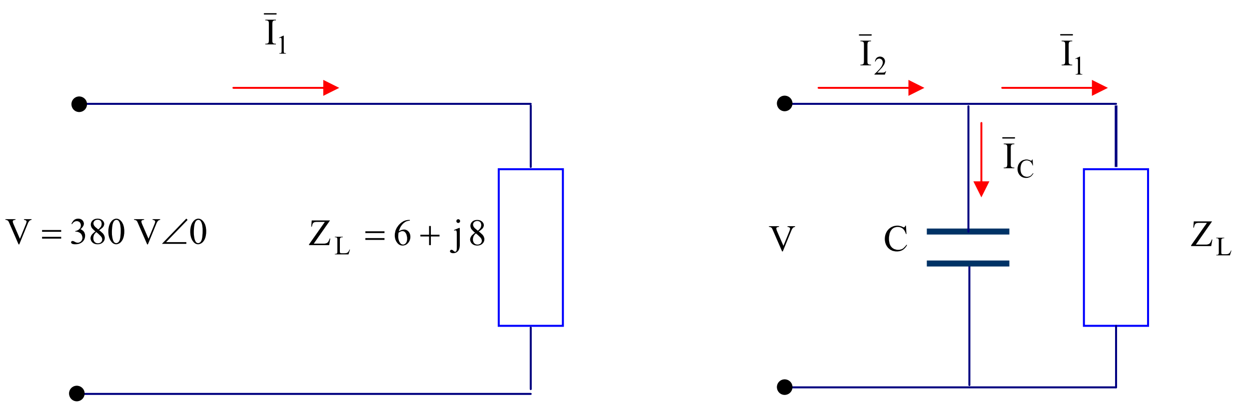
للدوائر الحثية التي يسبق الجهد فيها التيار، وكما هو موضح بالشكل (٢- ١٣)، فتغذية الحمل مباشرة من المصدر ينتج عن ذلك سحب الحمل لتيار مقداره I_1 من المصدر بزاوية φ_1، وبالتالي معامل القدرة هو $P.F_1 = \cos \varphi_1$. ثم لتحسين معامل القدرة تضاف المكثفات على التوازي مع الحمل (وذلك للدوائر ذات الطبيعة الحثية) حيث تيار المكثف يتقدم دائما على الجهد وبالتالي، وكما هو مبين بشكل (٢- ١٤)، تقل الزاوية φ وبالتالي يتحسن معامل القدرة.



شكل (٢- ١٤) تحسين معامل القدرة عن طريق المكثفات.

مثال (٢- ٥)

شكل (٢- ١٥) يبين الحمل الكهربائي الخاص بمنشأة صناعية صغيرة، احسب سعة المكثف المطلوب لرفع معامل القدرة إلى واحد صحيح.



شكل (٢- ١٥) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ١٣).

الحل

نبدأ بحساب المعاوقة Z_L وذلك كقيمة وزاوية:

$$Z_L = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10\,\Omega$$

ثم نحسب الزاوية θ_{ZL}:

$$\theta_{ZL} = \tan^{-1}\frac{8}{6} = 51.3^\circ$$

ثم نحسب التيار I_1 :

ثم لحساب قيمة المكثف، على اعتبار أن معامل القدرة أصبح يساوي الواحد الصحيح، وهذا يعني أن الزاوية φ_2 أصبحت تساوي صفراً. وعلى هذا فإن قيمة تيار المكثف:

$$I_C = I_1 \cdot \sin\varphi_1 = 38 \cdot \sin(-51.3^\circ) = -\,29.66\ A$$

ومن المعروف أن زاوية تيار المكثف هي $\theta_C = 90^\circ$:

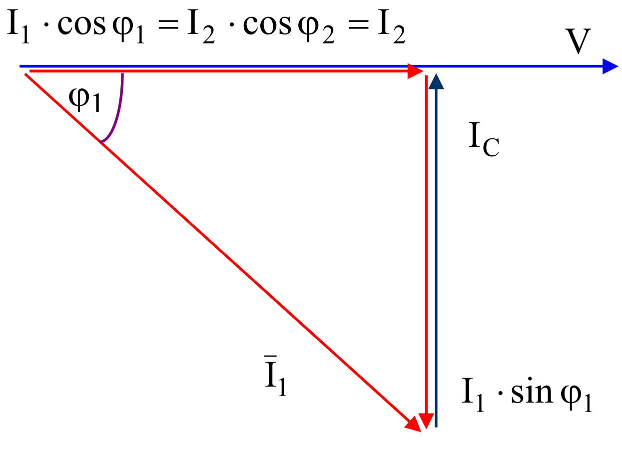
$$\therefore I_C = -\,29.66\ A\ \angle 90^\circ$$

وهكذا يمكن حساب قيمة سعة المكثف:

$$I_C = \frac{V\angle 0}{-\,j(1/\omega C)} = \frac{V\angle 0}{(1/\omega C)\angle -90} = V\omega C\angle 90$$

$$C = \frac{-\,29.66}{380 \times 2\pi \times 50} = -\,248.42\ \mu F$$

ويمكن رسم المخطط الاتجاهي كما هو مبين بشكل (٢- ١٦).



شكل (٢- ١٦) رفع معامل القدرة إلى واحد صحيح.

تدريبات على الوحدة الثانية

أولاً: الأسئلة:

١. أثبت بالقوانين أن الجهد والتيار لهما نفس زاوية الطور لعنصر المقاومة الكهربائية.

٢. أثبت بالقوانين أن الجهد يسبق التيار بزاوية ٩٠° في الملف.

٣. أثبت بالقوانين أن الجهد يتأخر عن التيار بزاوية ٩٠° في المكثف.

٤. استنتج قيمة المفاعلة الحثية للملف X_L.

٥. استنتج قيمة المفاعلة الحثية للمكثف X_C.

٦. استنتج قيمة المعاوقة الكلية لدائرة مكونة من مقاومة وملف ومكثف على التوالي واحسب زاويتها.

ثانياً: التمارين:

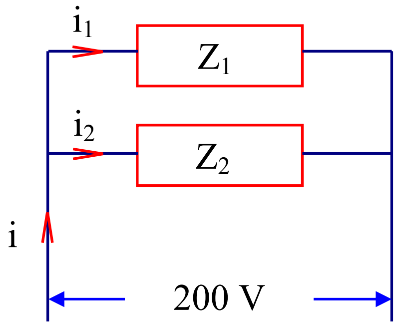
١. احسب قيمة معامل الحث الذاتي المحصلة لملفين متصلين على التوالي إذا كانت قيمة أحدهما 50 mH وقيمة الآخر 70 mH .

٢. احسب قيمة معامل الحث الذاتي المحصلة لملفين متصلين على التوازي إذا كانت قيمة أحدهما 30 mH وقيمة الآخر 20 mH .

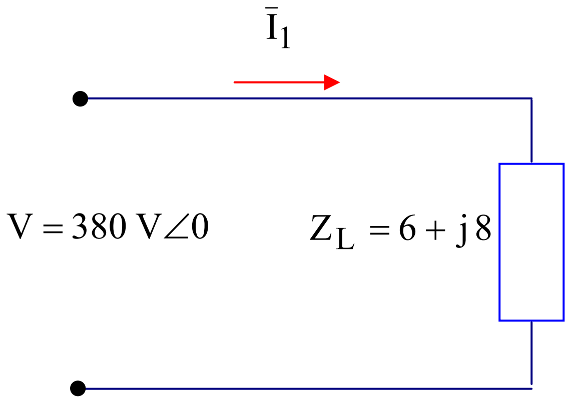
٣. احسب قيمة السعة المحصلة لمكثفين متصلين على التوالي إذا كانت قيمة أحدهما 100 μF وقيمة الآخر 25 μF .

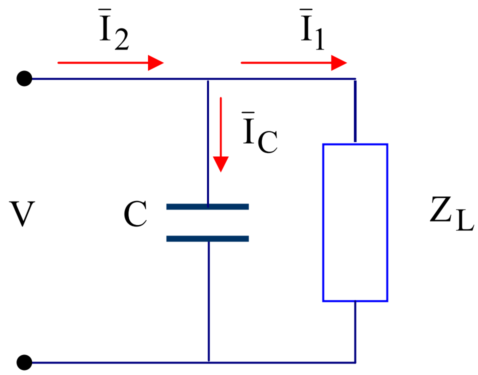
٤. احسب قيمة السعة المحصلة لمكثفين متصلين على التوازي إذا كانت قيمة أحدهما 100 μF وقيمة الآخر 25 μF .

٥. في الدائرة المبينة بالشكل التالي، معاوقتان متصلتان معاً على التوازي، حيث: $Z_1 = 8 + j6$ & $Z_2 = 6 - j8$ ، فإذا كان الجهد المطبق عليهما $E = 200$ V بتردد (f =50 Hz). احسب التيار الكلي.



٦. الشكل التالي يبين الحمل الكهربائي الخاص بمنشأة صناعية صغيرة، احسب سعة المكثف المطلوب لرفع معامل القدرة إلى واحد صحيح.





هندسة كهربائية - ٢

دوائر التيار المتردد

الأهداف العامة للوحدة الثالثة

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة، يكون المتدرب قادراً على معرفة:

- كيفية التعامل مع العناصر المختلفة في الدائرة الكهربائية باستخدام المعامل j
- دوائر التوالي من مقاومات وملفات ومكثفات.
- دوائر التوازي من مقاومات وملفات ومكثفات.
- القدرة في دوائر التيار المتردد من قدرة فعالة وقدرة غير فعالة وقدرة ظاهرية.
- معامل القدرة في الدوائر الكهربائية العملية وكيفية تحسينه.

٣- ١ مقدمة Introduction

في هذه الوحدة سوف ندرس دوائر التيار المتردد بعد التعرف على العناصر المستخدمة في دوائر التيار المتردد في الوحدة الثانية.

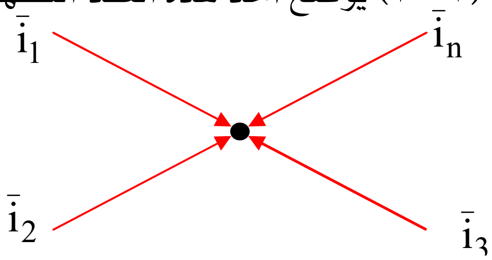
٣- ٢ قانونا كيرشوف Kirchhoff's Laws

٣- ٢- ١ قانون كيرشوف للتيار Kirchhoff's Current Law

ينص قانون كيرشوف للتيار أن " المجموع الجبري للتيارات الكهربائية اللحظية الداخلة إلى أي عقدة كهربائية يساوي صفراً ، ويعبر عنه رياضياً كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \bar{i}_k = 0 \qquad (٣-١)$$

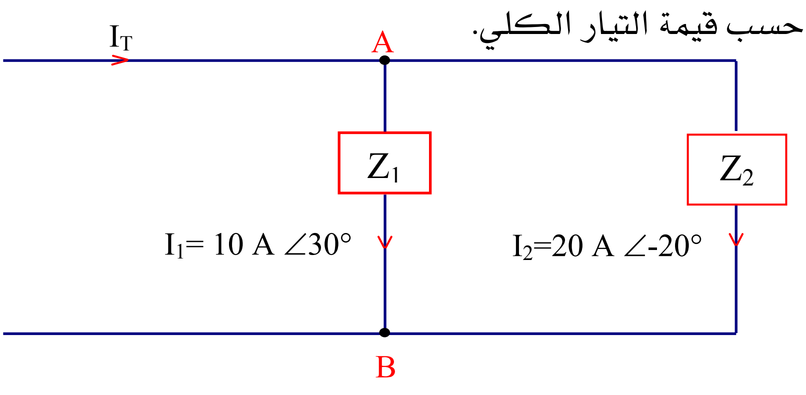
حيث n هو عدد التيارات المتصلة بهذه العقدة الكهربائية، وتعتبر التيارات اللحظية الداخلة إلى العقدة تيارات سالبة بينما تعتبر التيارات اللحظية الخارجة منها تيارات موجبة، ويلاحظ هنا أن التيارات جميعها كميات اتجاهية. وشكل (٣- ١) يوضح أحد هذه العقد الكهربائية.



شكل (٣- ١) التيارات الجبرية الداخلة إلى العقدة

مثال (٣- ١)

في شكل (٣- ٢)، احسب قيمة التيار الكلي.



شكل (٣- ٢) الدائرة الكهربائية لمثال (٣- ١).

الحل

لحساب التيار الكلي I_T، نطبق قانون كيرشوف للتيارات على أي من النقطتين A أو B كالآتي:

- عند نقطة A:

(أ) مجموع التيارات الداخلة إلى النقطة = (I_T)

(ب) مجموع التيارات الخارجة من النقطة = $(I_1 + I_2)$

إذن:

$$(I_T) = (I_1 + I_2)$$

- عند نقطة B:

(أ) مجموع التيارات الداخلة إلى النقطة = $(I_1 + I_2)$

(ب) مجموع التيارات الخارجة من النقطة = (I_T)

إذن:

$$(I_1 + I_2) = (I_T)$$

نلاحظ أن تطبيق قانون كيرشوف للتيارات عند أي من النقطتين A أو B يعطي نفس النتيجة.

إذن:

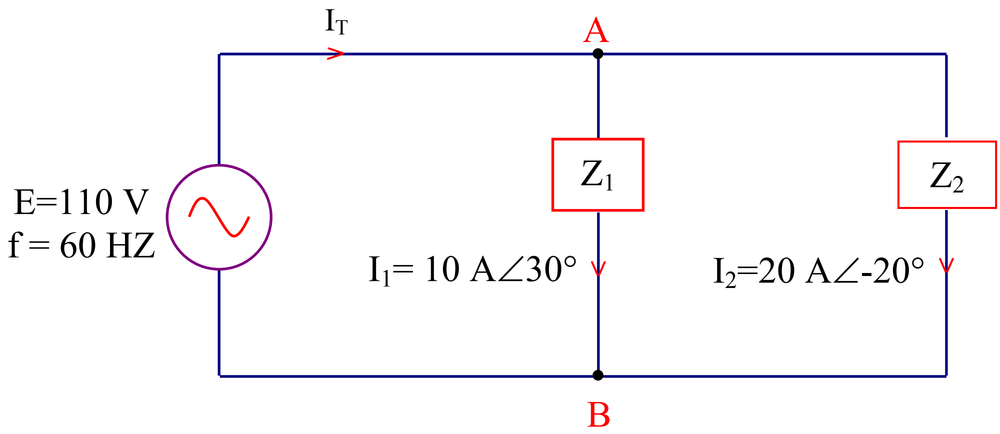
□

$$I_T = (I_1 + I_2) = 10\ A\angle 30° + 20\ A\angle -20° =$$

$$I_T = (8.66 + j\,5) + (18.8 - j\,6.84) = 27.46 - j1.84 = 27.5\ A\ \angle -3.84°$$

مثال (٣- ٢)

في شكل (٣- ٣) احسب قيم ومكونات المعاوقات Z_1, Z_2، إذا كان مصدر الجهد:
E=110 V, f=60HZ



شكل (٣- ٣) الدائرة الكهربائية لمثال (٣- ٢).

الحل

لحساب قيم المقاومات نستخدم قانون أوم كالآتي::

$$Z_1 = \frac{110\ V\angle 0^\circ}{10\ A\angle 30^\circ} = 11\ \Omega\angle -30^\circ$$

$$Z_2 = \frac{110\ V\angle 0^\circ}{20\ A\angle -20^\circ} = 5.5\ \Omega\angle 20^\circ$$

لحساب المكونات:

$$Z_1 = 11\ \Omega\angle -30^\circ = 11\cdot\cos(-30^\circ) + j11\cdot\sin(-30^\circ) = 9.52 - j5.5$$

القيمة 9.52 رقم حقيقي يدل على وجود مقاومة قيمتها $R_1 = 9.52\ \Omega$ والإشارة السالبة تعني وجود مكثف على التوالي مع المقاومة، حيث $X_C = 5.5\ \Omega$ ، إذن قيمة السعة C_1 يمكن حسابها كالآتي:

$$X_C = \frac{1}{\omega\cdot C}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega\cdot X_C} = \frac{1}{2\pi\times 60\times 5.5} = 482.28\ \mu F$$

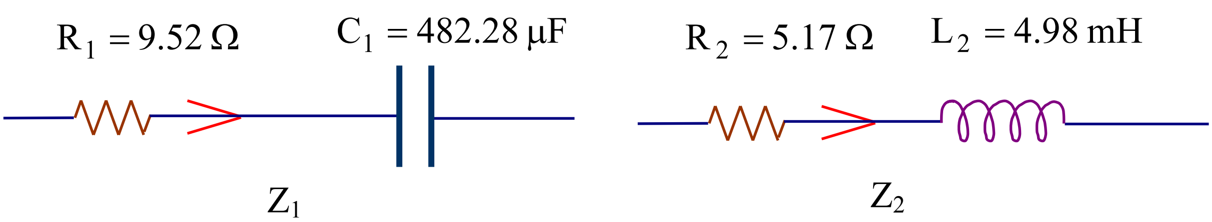
وبالمثل:

$$Z_2 = 5.5\ \Omega\angle 20^\circ = 5.5\cos(20^\circ) + j5.5\sin(20^\circ) = 5.17 + j1.88$$

القيمة 5.17 رقم حقيقي يدل على وجود مقاومة قيمتها $R_2= 5.17\ \Omega$ والإشارة الموجبة تعني وجود ملف على التوالي مع المقاومة، حيث $X_L= 1.88\ \Omega$ ، إذن قيمة الحث الذاتي للملف L يمكن حسابها كالآتي:

$$X_L = \omega \cdot L_2$$

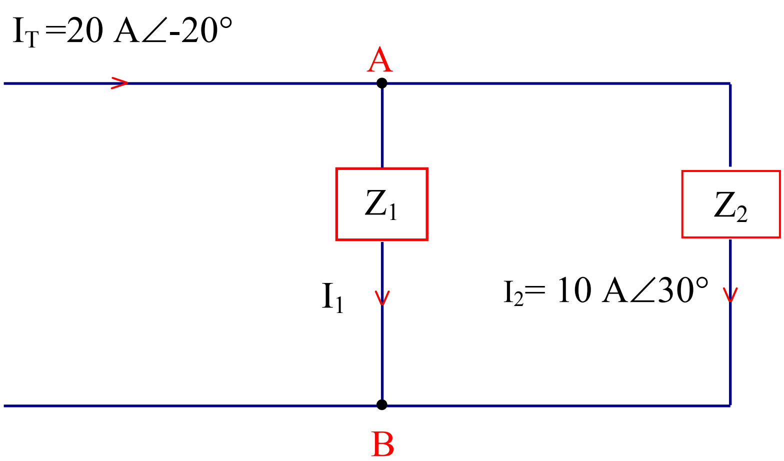
$$L_2 = \frac{X_L}{\omega} = \frac{1.88\,\Omega}{2\pi \times 60} = 4.98\text{ mH}$$



شكل (٣- ٤) مكونات المعاوقات $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ لمثال (٣- ٢).

مثال (٣- ٣)

في الشكل (٣- ٥)، احسب قيمة التيار الفرعي I_1.



شكل (٣- ٥) الدائرة الكهربائية لمثال (٣- ٣).

الحل

لحساب التيار الفرعي I_1، نطبق قانون كيرشوف للتيارات على النقطة A كالآتي:

- عند نقطة A:

مجموع التيارات الداخلة إلى النقطة (I_T) = مجموع التيارات الخارجة من النقطة$(I_1 + I_2)$

إذن:

$$(\bar{I}_T) = (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

$$(\bar{I}_1) = (\bar{I}_T - \bar{I}_2)$$

$$\bar{I}_1 = (\bar{I}_T - \bar{I}_2) = 20\ A\angle 20° - 10\angle 30° = 18.8 + j\,6.84 \ - (8.66 + j\,5)$$

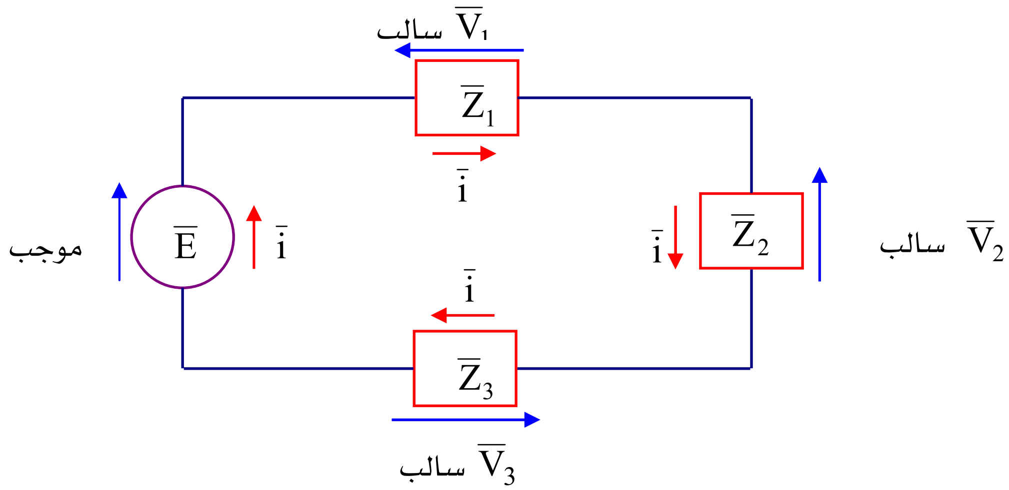
$$\bar{I}_1 = 10.14 + j\,1.84 = 10.3\ A\ \angle 10.28°$$

٣- ٢- ٢ قانون كيرشوف للجهود Kirchhoff's Voltage Law

ينص قانون كيرشوف للجهود أن " في أي دائرة كهربائية مغلقة يكون المجموع الجبري للجهود الكهربائية اللحظية على مكونات هذه الدائرة يساوي صفراً.

$$\sum_{k=1}^{k=n} \bar{v}_k = 0 \qquad (٣-٢)$$

حيث n هو عدد الجهود الموجودة في هذه الدائرة الكهربائية، وبأخذ التيار مرجعاً تعتبر الجهود اللحظية في اتجاه التيار موجبة بينما الجهود اللحظية في عكس اتجاه التيار تعتبر سالبة. ويلاحظ هنا أن الجهود جميعها كميات اتجاهية. وشكل (٣- ٦) يوضح أحد هذه الدوائر الكهربائية.



شكل (٣- ٦) تقسيم الجهود في دائرة تيار متردد متوالية

وعلى هذا يمكن أن يكتب قانون كيرشوف للجهود للشكل السابق كالآتي:

$$\overline{E} - \overline{V}_1 - \overline{V}_2 - \overline{V}_3 = 0 \qquad (٣-٣)$$

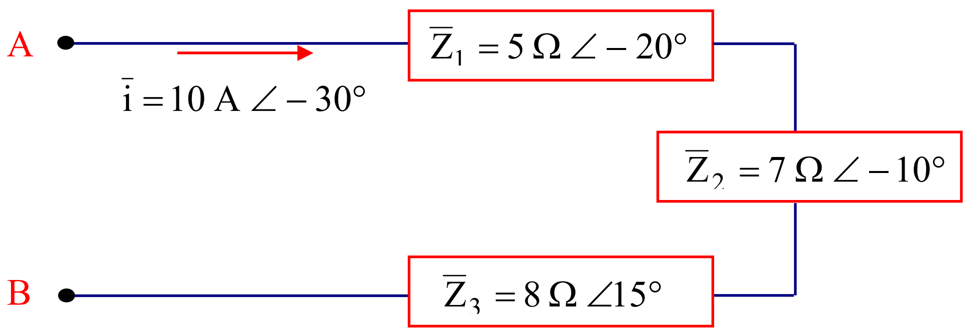
أو بصورة أخرى:

$$\overline{E} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 \qquad (٣-٤)$$

يلاحظ أن اتجاه الجهد عكس اتجاه التيار في المعاوقات وفي اتجاه التيار بالنسبة لمصدر الجهد.

مثال (٣- ٤)

في شكل (٣- ٧) احسب الجهد بين النقطتين A, B.



شكل (٣- ٧) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ٤)

الحل

لحساب الجهد بين النقطتين، نطبق قانون كيرشوف للجهود كالآتي:

$$\overline{V}_{AB} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3$$

ويمكن حساب كل جهد من الجهود الثلاثة على حدة كالآتي:

$$\overline{V}_1 = \overline{i} \cdot \overline{Z}_1 = (10\ A \angle -30°) \cdot (5\ \Omega \angle -20°) = 50\ V \angle -50°$$

$$\overline{V}_2 = \overline{i} \cdot \overline{Z}_2 = (10\ A \angle -30°) \cdot (7\ \Omega \angle -10°) = 70\ V \angle -40°$$

$$\overline{V}_3 = \overline{i} \cdot \overline{Z}_3 = (10\ A \angle -30°) \cdot (8\ \Omega \angle 15°) = 80\ V \angle -15°$$

وبالتعويض في معادلة الجهد V_{AB} ، نحصل على الآتي:

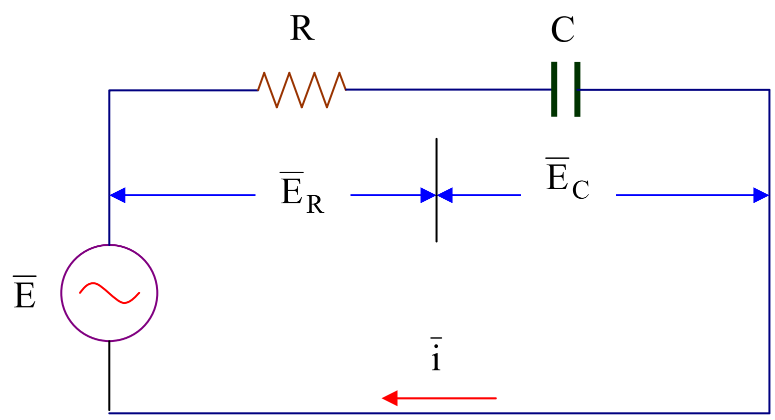
$$\overline{V}_{A-B} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 50\ V\angle -50° + 70\ V\angle -40° + 80\ V\angle -15°$$

$$\overline{V}_{AB} = (32.14 - j38.3) + (53.62 - j45) + (77.27 - j20.7) =$$

$$\overline{V}_{AB} = 163 - j104 = 193.4\ V\angle -32.54°$$

٣-٣ مقاومة موصلة على التوالي مع مفاعلة سعوية RC series Circuit

شكل (٣-٨) يوضح دائرة كهربائية لمقاومة ومكثف موصلين على التوالي، ومنها نجد أن:



شكل (٣-٨) مقاومة ومكثف على التوالي في دائرة كهربائية.

$$\overline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} \qquad (٣-٥)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (٣-٦)$$

$$\angle\theta_Z = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\omega CR}\right) \quad \Rightarrow \text{زاوية سالبة} \qquad (٣-٧)$$

ويمكن حساب التيار $\bar{i}$ كما يلي:

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{|E| \angle\theta_E}{|Z| \angle\theta_Z} = \frac{|E| \angle\theta_E}{\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\right)\angle\theta_Z} = |i| \angle\theta_i \qquad (٣-٨)$$

حيث إن:

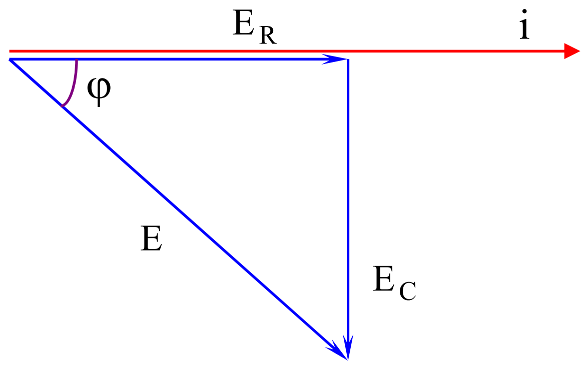
$$|i| = \frac{|E|}{|Z|}, = \frac{(E)}{\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\right)} \qquad (٣-٩)$$

$$\theta_i = \theta_E - \theta_Z \qquad (٣-١٠)$$

إذا كان الجهد هو المرجع (الدليل) فإن زاويته تساوي $0°$، وعلى ذلك:

$$\theta_i = 0° - \theta_Z = \varphi \qquad (٣-١١)$$

بما أن الزاوية θ_Z سالبة، إذن زاوية التيار تكون موجبة، وهذا يعني أن التيار يسبق الجهد. وبذلك يمكن رسم المخطط الإتجاهي كما هو موضح بالشكل (٣- ٩).



شكل (٣- ٩) علاقات متجهات الجهد على المقاومة والمكثف في دائرة التوالي.

حيث:

$$\bar{E} = \bar{E}_R + \bar{E}_C \quad (٣\text{-}١٢)$$

$$\bar{E}_R = \bar{i} \cdot R \quad (٣\text{-}١٣)$$

$$\bar{E}_C = \bar{i} \cdot \left(\frac{-j}{\omega C}\right) \quad (٣\text{-}١٤)$$

$$\bar{E} = \bar{i} \cdot R - \bar{i} \cdot \left(\frac{j}{\omega C}\right) \quad (٣\text{-}١٥)$$

$$\bar{E} = \bar{i} \cdot \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right) = \bar{i} \cdot \bar{Z} \quad (٣\text{-}١٦)$$

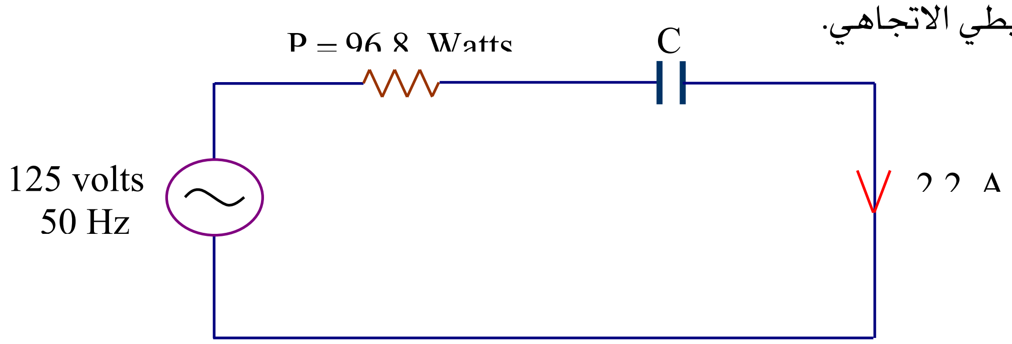
$$|E| = |i| \bullet |Z| \quad (٣\text{-}١٧)$$

$$|E| = |i| \bullet \sqrt{\left(R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right)} \quad (٣\text{-}١٨)$$

$$|E| = \sqrt{\left(|i|^2 R^2 + |i|^2 \bullet \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right)} = \sqrt{|E_R|^2 + |E_C|^2} \quad (٣\text{-}١٩)$$

مثال (٣- ٥)

سلط جهد مقداره 125 volts وتردده 50 Hz على دائرة كهربائية مكونة من مقاومة ومكثف متصلة على التوالي، كما هو مبين بشكل (٣- ١٠)، فإذا كان التيار المار في هذه الدائرة يساوي 2.2 Amp. والقدرة الكهربائية المفقودة في المقاومة يساوي 96.8 Watt، احسب قيمة المقاومة وسعة المكثف وارسم الرسم التخطيطي الاتجاهي.



شكل (٣- ١٠) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ٥).

الحل

$$P = i^2 R$$

$$R = \frac{P}{i^2} = \frac{96.8}{2.2^2} = 20\ \Omega$$

$$E_R = iR = 2.2 \times 20 = 44\ \text{volts}$$

$$E_C = \sqrt{E^2 - E_R^2} = \sqrt{(125)^2 - (44)^2} = 117\ \text{volts}$$

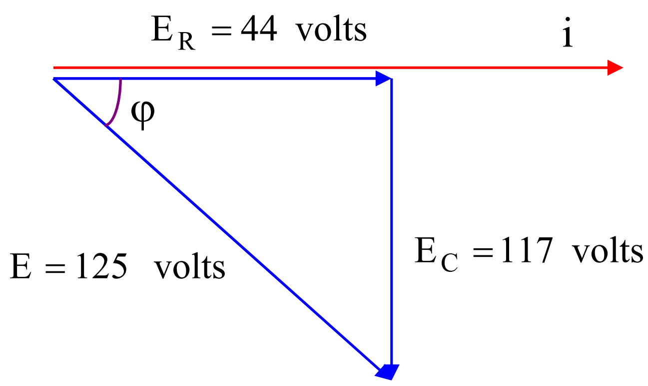
$$E_C = i \bullet X_C$$

$$X_C = \frac{117}{2.2} = 53.2\ \Omega$$

$$X_C = 53.2 = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times C}$$

$$C = 60 \times 10^{-6}\ \text{Farad}$$

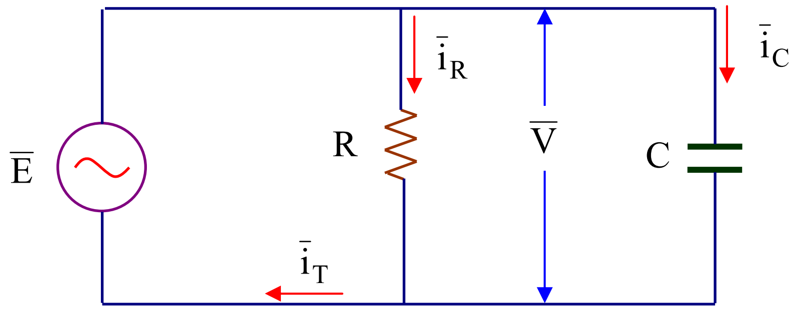
وشكل (٣- ١١) يبين الرسم التخطيطي الاتجاهي.



شكل (٣- ١١) علاقات الجهد على المقاومة والمكثف مثال (٣- ٥).

٣- ٤ مقاومة موصلة على التوازي مع مفاعلة سعوية RC Parallel Circuit

توضح الدائرة الكهربائية في شكل (٣- ١٢) كيفية توصيل مكثف مع مقاومة على التوازي، يمكن حساب قيمة وزاوية المعاوقة Z كالتالي:



شكل (٣- ١٢) الدائرة الكهربائية لمكثف ومقاومة على التوازي.

$$\bar{Z} = \frac{R \cdot \left(-j\left(\frac{1}{\omega C}\right)\right)}{\left(R - j\left(\frac{1}{\omega C}\right)\right)} = \frac{\left(-j\frac{R}{\omega C}\right)}{\left(\frac{(R\omega C - j)}{\omega C}\right)} \qquad (٣\text{-}٢٠)$$

$$\bar{Z} = \frac{-jR}{(R\omega C - j)} = \frac{-jR\cdot(R\omega C + j)}{(R\omega C - j)\cdot(R\omega C + j)} \qquad (٣\text{-}٢١)$$

$$\bar{Z} = \frac{-jR\cdot(R\omega C + j)}{(R\omega C - j)\cdot(R\omega C + j)} = \frac{(R - jR^2\omega C)}{(R^2\omega^2C^2 + 1)} \qquad (٣\text{-}٢٢)$$

$$\bar{Z} = \frac{R}{(R^2\omega^2C^2 + 1)} - j\frac{R^2\omega C}{(R^2\omega^2C^2 + 1)} \qquad (٣\text{-}٢٣)$$

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{R}{(R^2\omega^2C^2 + 1)}\right)^2 + \left(\frac{R^2\omega C}{(R^2\omega^2C^2 + 1)}\right)^2} \qquad (٣\text{-}٢٤)$$

$$\angle\theta_Z = \frac{\left(-R^2\omega C/(R^2\omega^2C^2 + 1)\right)}{\left(R/(R^2\omega^2C^2 + 1)\right)} = \tan^{-1}\left(\frac{-R^2\omega C}{R}\right) \qquad (٣\text{-}٢٥)$$

ويمكن بالتالي حساب التيارات كالآتي:

$$\bar{i}_R = \frac{E\angle 0^\circ}{R\angle 0^\circ} = \frac{E}{R}\angle 0^\circ \qquad (٣\text{-}٢٦)$$

$$\bar{i}_C = \frac{E\angle 0^\circ}{\frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ} = E\omega C\angle 90^\circ \tag{٣- ٢٧}$$

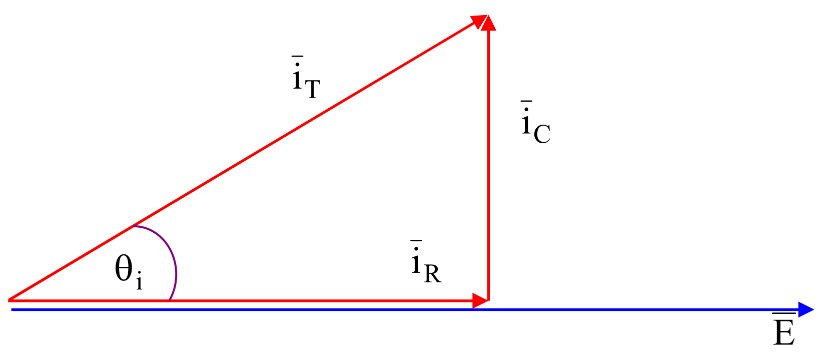
$$\bar{i}_T = \bar{i}_R + \bar{i}_C = \frac{E}{R}\angle 0^\circ + E\omega C\angle 90^\circ \tag{٣- ٢٨}$$

$$\bar{i}_T = \left(\frac{E}{R} + j\,0\right) + (0 + j\,E\omega C) = \left(\frac{E}{R} + j\,E\omega C\right) \tag{٣- ٢٩}$$

$$\left|\bar{i}_T\right| = \sqrt{\left(\frac{E}{R}\right)^2 + (E\omega C)^2} \tag{٣- ٣٠}$$

$$\angle\theta_i = \tan^{-1}\left(E\omega C\Big/\left(\frac{E}{R}\right)\right) = \tan^{-1}(\omega CR) \tag{٣- ٣١}$$

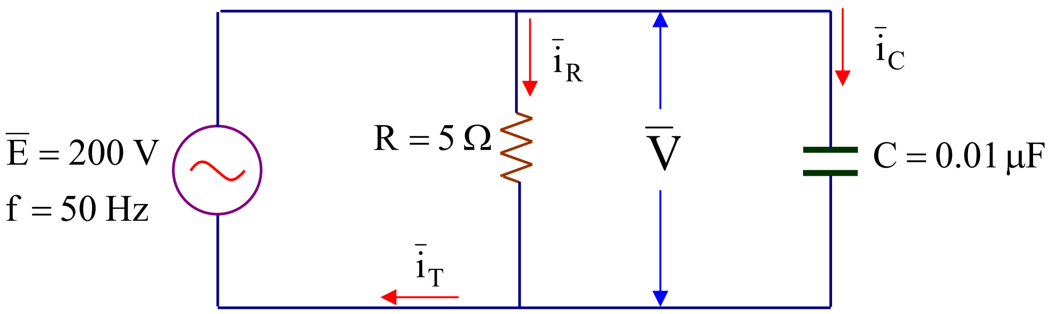
ويمكن بالتالي رسم المخطط الاتجاهي كما هو مبين بشكل (٣- ١٣).



شكل (٣- ١٣) المخطط الاتجاهي لمكثف ومقاومة على التوازي.

مثال (٣- ٦)

مقاومة أومية مقدارها $5\ \Omega$ موصلة على التوازي مع مكثف سعته $C = 0.01\ \mu F$، يتم تغذيتهما من مصدر جهد متردد: $|e| = 200$ volts وبتردد: $f = 50$ Hz كما هو مبين بشكل (٣- ١٤). احسب التيار المار في كل منهما واحسب التيار الكلي.



شكل (٣- ١٤) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ٦).

الحل

$$\bar{i}_R = \frac{E\angle 0°}{R\angle 0°} = \frac{E}{R}\angle 0° = \frac{200\text{ V}\angle 0°}{5\,\Omega\angle 0°} = 40\text{ A}\angle 0°$$

$$\bar{i}_C = E\omega C\angle 90° = 200\times 2\pi\times 50\times 0.01\times 10^{-6}\angle 90° = 62.8\times 10^{-3}\text{ A}\angle 90°$$

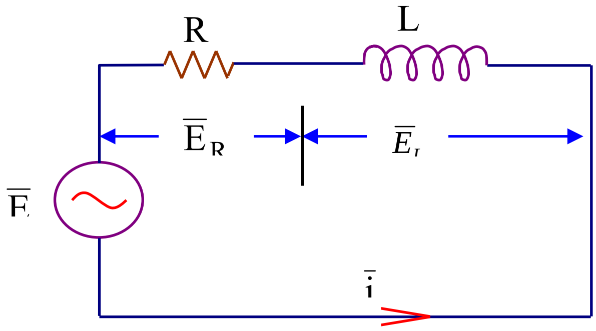
$$|\bar{i}_T| = \sqrt{\left(\frac{E}{R}\right)^2 + (E\omega C)^2} = E\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} = 200\times\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(3.14\times 10^{-6}\right)^2}$$

$$|\bar{i}_T| = 200\times\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(3.14\times 10^{-6}\right)^2} = 40\text{ A}$$

$$\angle\theta_i = \tan^{-1}(\omega CR) = \tan^{-1}\left(2\times\pi\times 50\times 0.01\times 10^{-6}\times 5\right) = 0°$$

٣- ٥ مقاومة موصلة على التوالي مع مفاعلة حثية **RL Series Circuit**

توضح الدائرة الكهربائية في شكل (٣- ١٥) كيفية توصيل ملف ومقاومة على التوالي، ويمكن حساب قيمة وزاوية المعاوقة Z كالتالي:



شكل (٣- ١٥) ملف ومقاومة على التوالي في دائرة كهربائية.

$$\bar{Z} = R + j\omega L \qquad (٣\text{-}٣٢)$$

$$|Z| = \sqrt{(R^2 + (\omega L)^2)} \tag{٣-٣٣}$$

$$\angle\theta_Z = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \tag{٣-٣٤}$$

ويلاحظ من المعادلة (٣- ٣٤) أن الزاوية θ_Z زاوية موجبة. ويمكن حساب التيار $\bar{i}$ كما يلي:

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{|E|\angle\theta_E}{|Z|\angle\theta_Z} = |i|\angle\theta_i \tag{٣-٣٥}$$

حيث إن:

$$|i| = \frac{|E|}{|Z|} = \frac{|E|}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}} \tag{٣-٣٦}$$

$$\angle\theta_i = \angle\theta_E - \angle\theta_Z \tag{٣-٣٧}$$

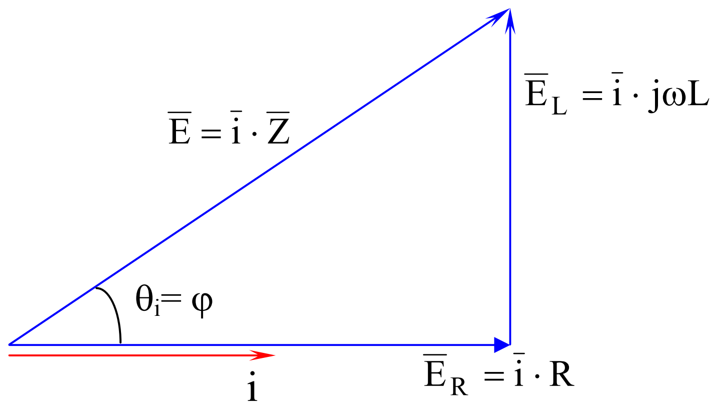
وعادة يؤخذ الجهد كمرجع (دليل) في مثل هذه الحالة ويكتب على الصورة:

$$\bar{E} = |E|\angle 0 \tag{٣-٣٨}$$

وعلى ذلك تكون زاوية التيار:

$$\angle\theta_i = \angle 0 - \angle\theta_Z = \angle -\theta_Z = \angle\varphi \tag{٣-٣٩}$$

حيث φ هي الزاوية التي تفصل بين اتجاه الجهد واتجاه التيار وتسمى أيضاً زاوية القدرة ويلاحظ أن زاوية التيار سالبة، مما يعني أن التيار يتأخر عن الجهد بهذه الزاوية. ويمكن رسم المخطط الاتجاهي كما هو مبين بشكل (٣- ١٦).



شكل (٣- ١٦) علاقات متجهات الجهد على المقاومة والملف في دائرة التوالي.

حيث:

$$\overline{E} = \overline{E}_R + \overline{E}_L \qquad (٣-٤٠)$$

$$\overline{E} = \overline{i} \cdot R + \overline{i} \cdot j\omega L = \overline{i} \cdot (R + j\omega L) = \overline{i} \cdot \overline{Z} \qquad (٣-٤١)$$

مثال (٣- ٧)

مقاومة أومية مقدارها $5\ \Omega$ موصلة على التوالي مع ملف ذي معامل حث ذاتي $L = 0.01$ Henry، يتم تغذيتهما من مصدر جهد متردد: $|e| = 200$ volts وبتردد: $f = 50$ Hz.

احسب:

(١) التيار المار فيهما.

(٢) الجهد على كل عنصر.

الحل

(١) لحساب التيار: نبدأ بحساب سرعة الزاوية ω:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2 \times 3.14 \times 50 = 314 \ \text{rad/sec}$$

ثم نحسب المفاعلة الحثية X_L كما يلي:

$$X_L = \omega \times L$$

$$X_L = 314 \times 0.01 = 3.14\ \Omega$$

ثم نحسب المعاوقة الكلية Z كما يلي:

$$|Z| = \sqrt{5^2 + (3.14)^2} = 5.9\,\Omega$$

$$\theta_Z = \tan^{-1}\left(\frac{3.14}{5}\right) = 32.13^\circ$$

ثم نحسب قيمة التيار i كما يلي:

$$\overline{i} = \frac{\overline{e}}{\overline{Z}}$$

وبأخذ الجهد كدليل (مرجع)، يمكن اعتبار زاويته تساوي $0°$ وتحسب قيم الزوايا الأخرى منسوبة إليه كالآتي:

$$\bar{i} = \frac{200\ V\angle 0°}{5.9\ \Omega\ \angle 32.13°} = 33.9\ A\ \angle -32.13°$$

ويلاحظ هنا أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها $32.13°$، حيث زاوية الجهد تساوي $0°$ بينما زاوية التيار تساوي $-32.13°$، والإشارة السالبة هنا تعني تأخر التيار عن الجهد.

(٢) لحساب الجهد على كل عنصر:

- الجهد على المقاومة:

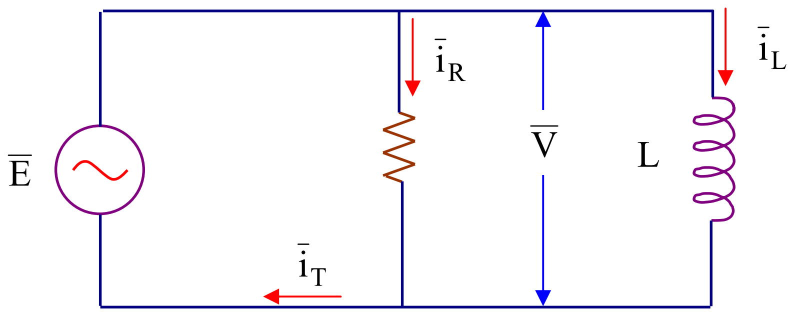
$$\bar{E}_R = \bar{i}\cdot R = 33.9\ A\ \angle -32.13° \cdot 5\ \Omega = 169.5\ V\ \angle -32.13°$$

- الجهد على الملف:

$$\bar{E}_L = \bar{i}\cdot \bar{X}_L = 33.9\ A\ \angle -32.13° \cdot 3.14\ \Omega\ \angle 90° = 106.45\ V\ \angle 57.87°$$

٣- ٦ مقاومة موصلة على التوازي مع مفاعلة حثية RL Parallel Circuit

توضح الدائرة الكهربائية في شكل (٣- ١٧) كيفية توصيل ملف مع مقاومة على التوازي، يمكن حساب قيمة وزاوية المعاوقة Z كالتالي:



شكل (٣- ١٧) مقاومة وملف على التوازي

يمكن حساب قيمة وزاوية المعاوقة Z كالتالي:

$$\overline{Z}=\frac{R\cdot j\omega L}{R+j\,\omega L}=\frac{R\cdot j\omega L\cdot(R-j\,\omega L)}{(R+j\,\omega L)\cdot(R-j\,\omega L)}=\frac{\left(R\omega^2L^2+j\,R^2\omega L\right)}{\left(R^2+\ \omega^2L^2\right)} \quad (٣-٤٢)$$

$$|Z|\ =\sqrt{\left(\frac{\left(R\omega^2L^2\right)}{\left(R^2+\ \omega^2L^2\right)}\right)^2+\left(\frac{\left(R^2\omega L\right)}{\left(R^2+\ \omega^2L^2\right)}\right)^2} \quad (٣-٤٣)$$

$$\overline{Z}\ =\frac{\left(R\omega^2L^2\right)}{\left(R^2+\ \omega^2L^2\right)}+j\frac{\left(R^2\omega L\right)}{\left(R^2+\ \omega^2L^2\right)} \quad (٣-٤٤)$$

$$\angle\theta_Z=\tan^{-1}\left(\frac{R^2\omega L}{R\omega^2L^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{R}{\omega L}\right) \quad (٣-٤٥)$$

ويمكن بالتالي حساب التيارات كالآتي:

$$\bar{i}_R\ =\frac{E\angle 0^\circ}{R\angle 0^\circ}=\frac{E}{R}\angle 0^\circ \quad (٣-٤٦)$$

$$\bar{i}_L\ =\frac{E\angle 0^\circ}{\omega L\angle 90^\circ}=\frac{E}{\omega L}\angle -90^\circ \quad (٣-٤٧)$$

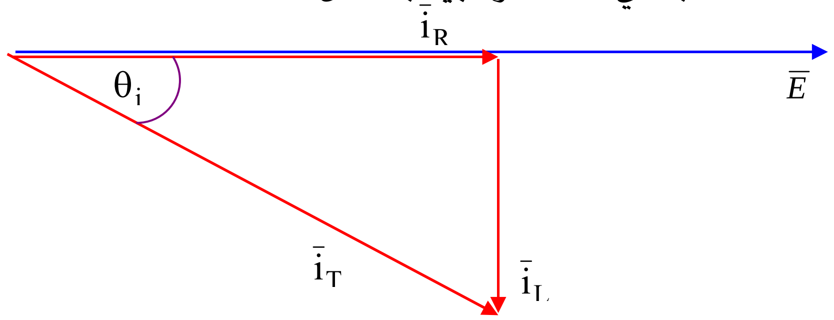
$$\bar{i}_T\ =\bar{i}_R\ +\bar{i}_L\ =\frac{E}{R}\angle 0^\circ+\frac{E}{\omega L}\angle -90^\circ \quad (٣-٤٨)$$

$$\bar{i}_T\ =\frac{E}{R}(1+j\,0)+\frac{E}{\omega L}(0-j1)=\frac{E}{R}-j\frac{E}{\omega L}=E\left(\frac{1}{R}-j\frac{1}{\omega L}\right) \quad (٣-٤٩)$$

$$\left|\bar{i}_T\right| = E \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2\right)} \qquad (٣\text{-}٥٠)$$

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(-\frac{R}{\omega L}\right) \qquad (٣\text{-}٥١)$$

ويمكن بالتالي رسم المخطط الاتجاهي كما هو مبين بشكل (٣- ١٨).

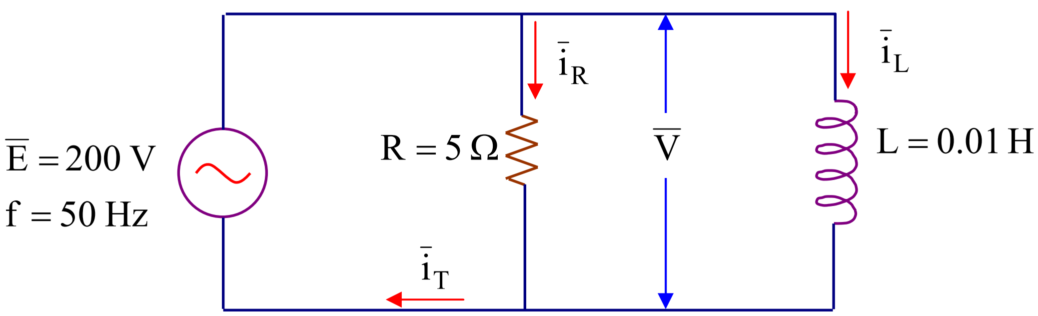


شكل (٣- ١٨) المخطط الاتجاهي لملف ومقاومة على التوازي.

مثال (٣- ٨)

شكل (٣- ١٩) يبين مقاومة أومية مقدارها 5 Ω موصلة على التوازي مع ملف ذي معامل حث ذاتي L = 0.01 Henry ، يتم تغذيتهما من مصدر جهد متردد : $|e| = 200$ volts وبتردد : f = 50 Hz.

احسب التيار المار في كل منهما ، واحسب التيار الكلي.



شكل (٣- ١٩) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ٨).

الحل

$$\bar{i}_R = \frac{E\angle 0^\circ}{R\angle 0^\circ} = \frac{E}{R}\angle 0^\circ = \frac{200\ V\angle 0^\circ}{5\ \Omega\angle 0^\circ} = 40\ A\angle 0^\circ$$

$$\bar{i}_L = \frac{E}{\omega L}\angle -90^\circ = \frac{E}{2\pi f L}\angle -90^\circ$$

$$\bar{i}_L = \frac{200\ V}{2\pi \cdot 50 \cdot 1\times 10^{-2}\ \Omega}\angle -90^\circ = 63.7\ A\angle -90^\circ$$

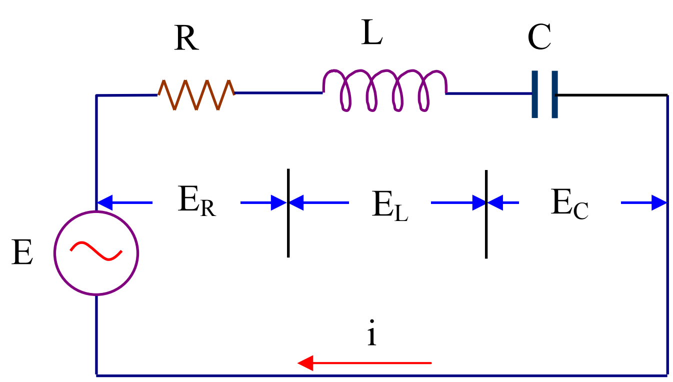
$$\left|\bar{i}_T\right| = E\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2\right)} = 200\times\sqrt{\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3.14}\right)^2\right)} = 75.2\ A$$

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(-\frac{R}{\omega L}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3.14}\right) = -57.9^\circ$$

٣- ٧ مقاومة موصلة على التوالي مع مفاعلة حثية و مفاعلة سعوية

RLC Series Circuit

نفترض الآن دائرة مكونة من مصدر جهد للتيار المتردد على التوالي مع عنصر مقاومة أومية R على التوالي مع ملف ذي معامل حث ذاتي L على التوالي مع مكثف ذي سعة C كما هو مبين بشكل (٣- ٢٠)، فيسري تيار i في الدائرة، وهذا التيار يمر في العناصر الثلاثة (توصيل توالي) ويكون مجموع الجهود المتكونة على العناصر الثلاثة (الانخفاض في الجهد) مساوياً لجهد المصدر (قانون كيرشوف للجهود). وعلى هذا يمكن حساب المعاوقة الكلية $\bar{Z}$ كما يلي:



شكل (٣- ٢٠) R، L، C على التوالي في دائرة كهربائية.

$$\overline{Z} = \left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \tag{٣-٥٢}$$

$$\left| \overline{Z} \right| = \sqrt{(R)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \tag{٣-٥٣}$$

$$\angle\theta_Z = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} \right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR} \right)$$

(٣-٥٤)

ويمكن حساب التيار كالآتي:

$$\bar{i} = \frac{E\angle 0^\circ}{|Z|\angle\theta_Z} = \frac{E}{|Z|}\angle -\theta_Z{}^\circ \tag{٣-٥٥}$$

$$\overline{E}_L = \bar{i}\cdot j\omega L = \bar{i}\cdot X_L$$

$$\frac{E}{\sqrt{(R)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}\angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR} \right) \tag{٣-٥٦}$$

ويمكن حساب الجهود على العناصر الثلاثة كالآتي:

$$\overline{E}_R = \frac{E\cdot R}{\sqrt{(R)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right) \qquad (٣\text{-}٥٧)$$

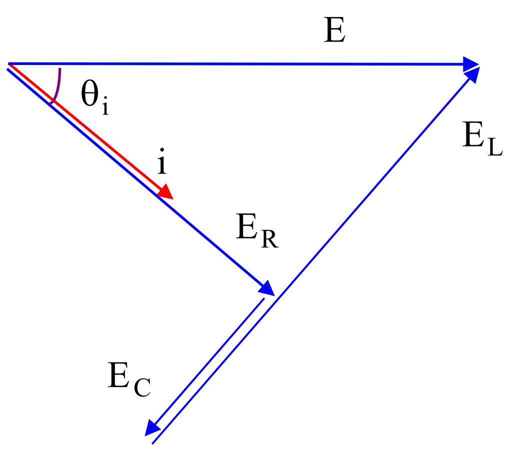
(٣-٥٨)

$$\overline{E}_L = \frac{E\cdot \omega L}{\sqrt{(R)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle 90^\circ -\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right) \qquad (٣\text{-}٥٩)$$

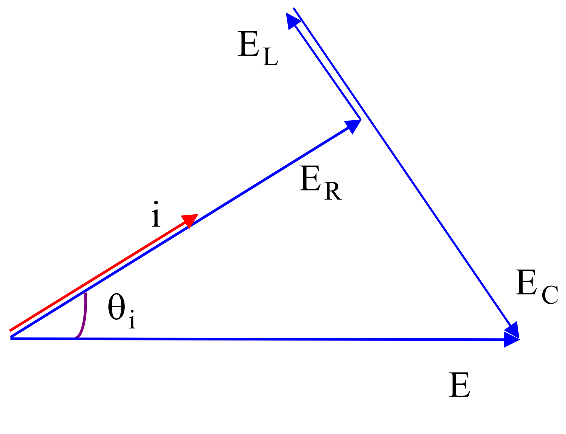
$$\overline{E}_C = -\overline{i}\cdot j\frac{1}{\omega C} = -\overline{i}\cdot X_C \qquad (٣\text{-}٦٠)$$

$$\overline{E}_C = \frac{(E/\omega C)}{\sqrt{(R)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle -90^\circ -\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right) \qquad (٣\text{-}٦١)$$

شكل (٣- ٢١) يبين الرسم التخطيطي الاتجاهي في حالة ($X_L < X_C$) وكذلك في حالة ($X_C < X_L$)



شكل (٣- ٢١- ب): ($X_C < X_L$)

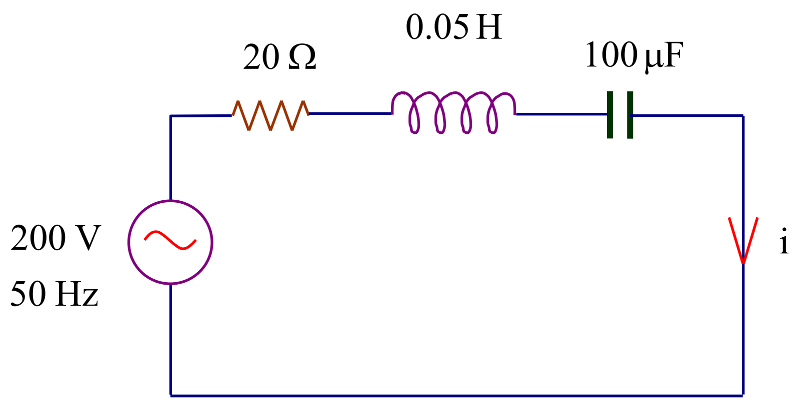


شكل (٣- ٢١- أ): ($X_L < X_C$)

مثال (٣- ٩)

مكثف ذو سعة 100 μF متصل على التوالي بمقاومة مقدارها 20 Ω وملف ذو معامل حث ذاتي L = 0.05 H ، كما هو مبين بشكل (٣- ٢٢) . احسب المعاوقة الكلية لهذه الدائرة عندما يكون التردد 50 Hz ، وكذلك التيار الكلي عند تغذيتها بجهد 200 volts. ارسم كذلك المخطط الاتجاهي.

الحل:



شكل (٣- ٢٢) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ٩).

$$\omega = 2\pi f = 2\times 3.14\times 50 = 314 \text{ rad/sec}$$

$$X_L = \omega L = 314\times 0.05 = 15.7 \ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\left(314\times 100\times 10^{-6}\right)} = 31.84\,\Omega$$

$$\overline{Z} = 20 + j(15.7 - 31.84) = 20 - j16.14$$

$$|Z| = \sqrt{(20)^2 + (16.14)^2} = 25.7 \ \Omega$$

$$\theta_Z = \tan^{-1}\left(\frac{-16.14}{20}\right) = -38.9°$$

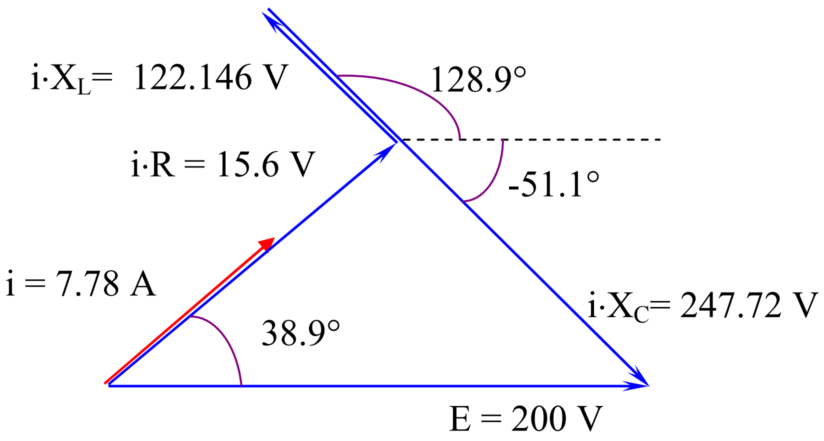
$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{\bar{\bar{Z}}} = \frac{200\ V\angle 0°}{25.7\ \Omega\angle -38.9°} = 7.78\angle 38.9°\ \text{Amp.}$$

$$\bar{E}_R = \bar{i}\cdot R = 7.78\ A\ \angle 38.9° \bullet 20\ \Omega = 155.6\ V\ \angle 38.9$$

$$\bar{E}_L = \bar{i}\cdot X_L = 7.78\ A\ \angle 38.9 \bullet 15.7\ \Omega\ \angle 90 = 122.146\ V\ \angle 128.9°$$

$$\bar{E}_C = \bar{i}\cdot X_C = 7.78\ A\ \angle 38.9 \bullet 31.84\ \Omega\ \angle -90 = 247.72\ V\ \angle -51.1°$$

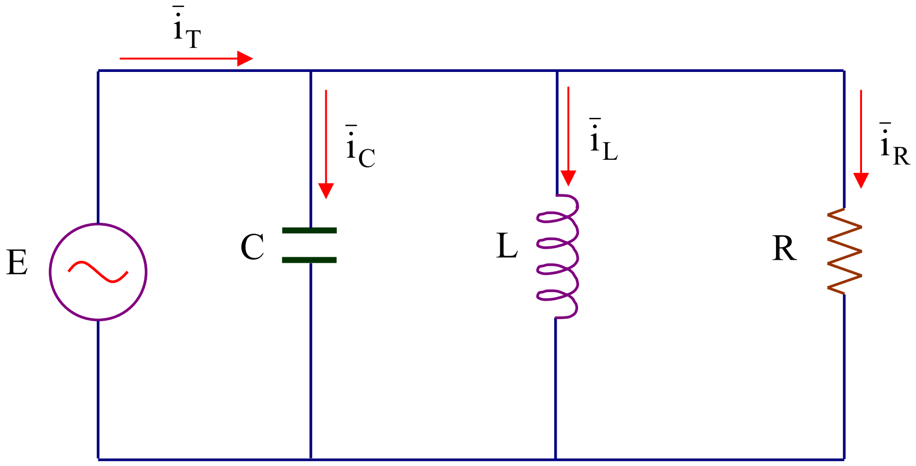
شكل (٣- ٢٣) يبين الرسم التخطيطي الاتجاهي



شكل (٣- ٢٣) الرسم الاتجاهي للمثال (٣- ٩)

٣- ٨ مقاومة وملف ومكثف موصلة على التوازي **RLC Parallel Circuit.**

نفترض توصيل عنصر مقاومة أومية R على التوازي مع ملف ذي معامل حث ذاتي L على التوازي مع مكثف ذي سعة C على التوازي مع مصدر للتيار المتردد ذو جهد E كما هو مبين بشكل (٣- ٢٤).



شكل (٣- ٢٤) الدائرة الكهربائية لمقاومة وملف ومكثف على التوازي.

من الشكل فإن التيار الكلي i هو مجموع: التيار المار في المقاومة (i_R) + التيار المار في الملف (i_L) + التيار المار في المكثف (i_C).

$$\bar{i} = \bar{i}_R + \bar{i}_L + \bar{i}_C \qquad (٣\text{-}٦٢)$$

ولأن الجهد E على المقاومة هو نفسه الجهد على الملف وكذلك على المكثف، فسوف نعتبره هنا هو الدليل (أي بزاوية = صفر)

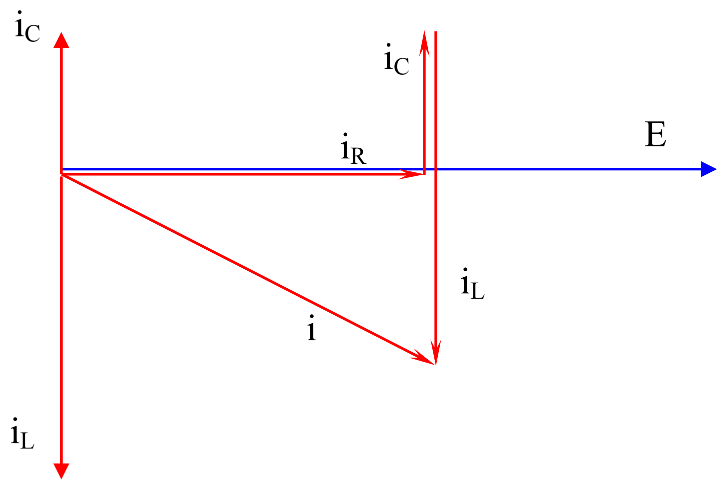
$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{R} + \frac{\bar{E}}{j\omega L} + \frac{\bar{E}}{\left(-\frac{j}{\omega C}\right)} \qquad (٣\text{-}٦٣)$$

$$\bar{i} = \bar{E}\cdot\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} - \frac{\omega C}{j}\right) = \bar{E}\cdot\left(\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) \qquad (٣\text{-}٦٤)$$

$$|i| = |E|\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad (٣\text{-}٦٥)$$

$$\angle\theta_i = \tan^{-1}\left(\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\Big/\left(\frac{1}{R}\right)\right) = \tan^{-1}\left(R\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}\right)\right) \qquad (٣\text{-}٦٦)$$

ويمكن رسم المخطط الاتجاهي كما هو مبين بشكل (٣- ٢٥)

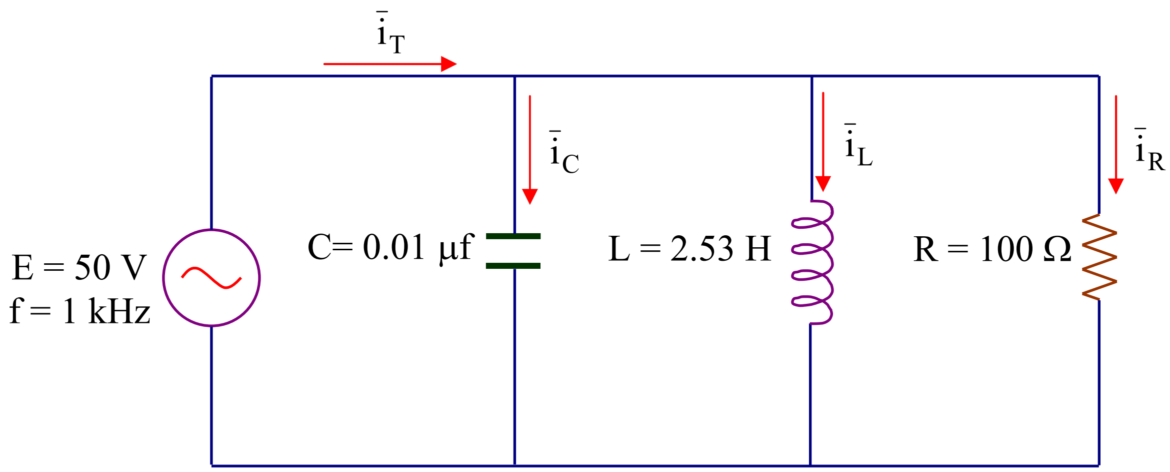


شكل (٣- ٢٥) المخطط الاتجاهي لمقاومة وملف ومكثف على التوازي.

مثال (٣- ١٠)

في الدائرة المبينة بشكل (٣- ٢٦) احسب التيار المار في كل فرع واحسب أيضاً التيار الكلي.

الحل



شكل (٣- ٢٦) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ١١).

$$\bar{i}_R = \frac{50\ V\ \angle 0^\circ}{100\ \Omega\ \angle 0^\circ} = 0.5\ A\ \angle 0^\circ$$

$$\bar{i}_L = \frac{50\ V\ \angle 0°}{(2 \times \pi \times 1000 \times 2.53)\,\Omega\ \angle 90°} = 3.145\ mA\ \angle -90°$$

$$\bar{i}_C = \frac{50\ V\ \angle 0°}{\left(1/2 \times \pi \times 1000 \times 0.01 \times 10^{-6}\right)\Omega\ \angle -90°} = 3.145\ mA\ \angle 90°$$

$$\bar{i}_T = \bar{i}_R + \bar{i}_L + \bar{i}_C = 0.5\ A\ \angle 0° + 3.145\ mA\ \angle -90° + 3.145\ mA\ \angle 90°$$

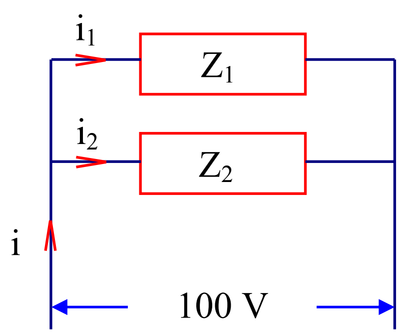
$$\bar{i}_T = 0.5\ A\ \angle 0°$$

وتسمى هذه الدائرة دائرة الرنين حيث يتلاشى تأثير كل من الملف والمكثف بتأثير أحدهما على الآخر، وتستخدم بكثرة في مجال الاتصالات.

مثال (٣- ١١)

في الدائرة المبينة بشكل (٣- ٢٧)، معاوقتان متصلتان معاً على التوازي، حيث: $Z_1 = 6 + j8$ & $Z_2 = 8 - j6$، فإذا كان الجهد المطبق عليهما $E = 100$ volts بتردد $(f = 60\ Hz)$.
احسب التيار الكلي.

الحل



شكل (٣- ٢٧) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ١١).

$$\bar{Z}_1 = 6 + j8 = 10\,\Omega\ \angle 51.3°$$

$$\bar{Z}_2 = 8 - j6 = 10\,\Omega\ \angle -36.9°$$

$$\bar{E} = 100\ V\ \angle 0°$$

$$\bar{i}_1 = \frac{100\angle 0^\circ}{10\angle 51.3^\circ} = 10\ \text{A} \angle -51.3^\circ$$

$$\bar{i}_2 = \frac{100\angle 0^\circ}{10\angle -36.9^\circ} = 10\ \text{A} \angle 36.9^\circ$$

$$\bar{Z}_t = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(6+j8)(8-j6)}{(6+j8)(8-j6)}$$

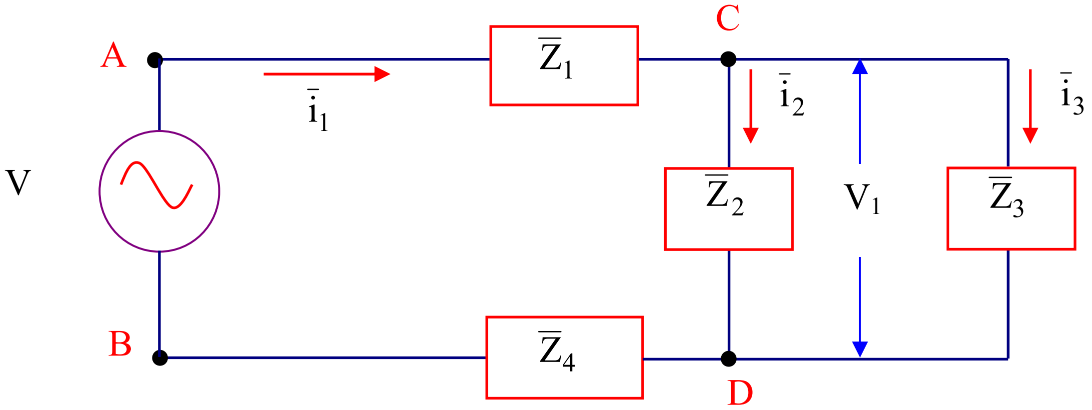
$$\bar{Z}_t = \frac{96+j28}{14+j2} = \frac{100\angle 16.26^\circ}{14.14\angle 8.13^\circ} = 7.1\,\Omega \angle 8.13^\circ$$

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_t} = \frac{100\angle 0}{7.1\angle 8.13} = 14.1\ \text{A} \angle -8.13^\circ$$

٣- ٩ الدوائر المركبة Compound Circuits

بعد استعراض توصيل الدوائر على التوالي وتوصيلها على التوازي، سنتعرض الآن إلى التوصيلات المركبة لدوائر التيار المتردد. في شكل (٣- ٢٨)، تتكون الدائرة الكهربائية من مجموعة من المعاوقات بعضها موصلة على التوالي وبعضها موصل على التوازي، فمثلاً المعاوقتان Z_2, Z_3 موصلتان على التوازي (راجع شروط التوازي)، وكذلك المعاوقتان Z_1, Z_4 موصلتان على التوالي ومعهما مصدر الجهد أيضاً (راجع شروط التوالي).

وهناك كثير من نظريات الدوائر الكهربائية التي تمكننا من التعامل مع مثل هذه الدوائر، سوف نستعرض البعض منها.



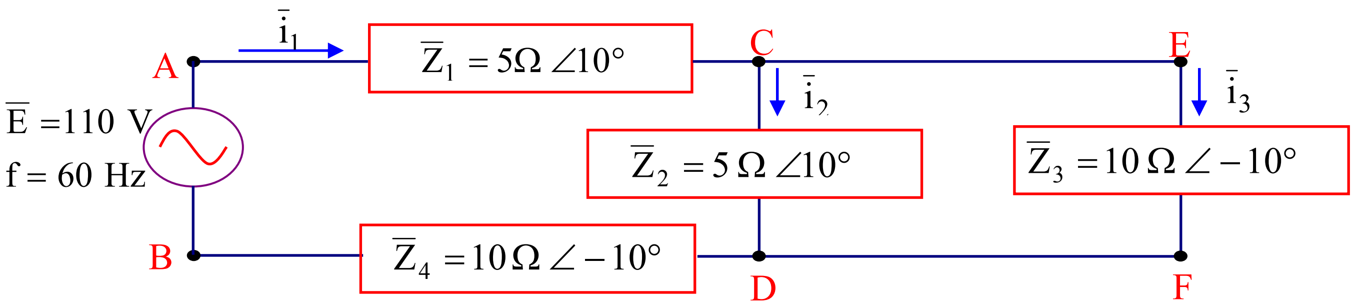
شكل (٣- ٢٨) دائرة كهربائية مركبة

٣- ٩- ١ طريقة الاختزال (تبسيط الدائرة) Simplification Method

وطريقة الاختزال تتلخص في اختزال الدائرة الكهربائية إلى أقل عدد من المعاوقات ويستحسن أن تختزل إلى معاوقة واحدة ومصدر جهد ، وبتطبيق قانون أوم وقوانين كيرشوف يمكن حل الدائرة الكهربائية.

مثال (٣- ١٢)

في شكل (٣- ٢٩) احسب: التيارات $\bar{i}_1, \bar{i}_2 \,\&\, \bar{i}_3$.



شكل (٣- ٢٩) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ١٢)

الحل:

يمكن حل هذه المسألة عن طريق قوانين كيرشوف ويمكن أيضاً حلها عن طريق الاختزال وسوف نعرض كل طريقة منهما.

أولاً: عن طريق قوانين كيرشوف

لحل هذه المسألة المطلوب إيجاد تيارات الدائرة الثلاثة ، أي لدينا ثلاثة مجاهيل وعلى ذلك لابد من تكوين ثلاثة معادلات للحصول على هذه المجاهيل الثلاثة. وهذه المعادلات يمكن تكوينها عن طريق قوانين كيرشوف كما يلي:

- عند العقدة C نستطيع تطبيق قانون كيرشوف للتيارات كما يلي:

$$\bar{i}_1 = \bar{i}_2 + \bar{i}_3$$

- للدائرة المغلقة ACDB يمكن تطبيق قانون كيرشوف للجهود كما يلي:

$$\bar{E} = \bar{i}_1\,\bar{Z}_1 + \bar{i}_2\,\bar{Z}_2 + \bar{i}_1\,\bar{Z}_4 = \bar{i}_1\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4\right) + \bar{i}_2\,\bar{Z}_2$$

$$\bar{E} = \bar{i}_1\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4\right) + \left(\bar{i}_1 - \bar{i}_3\right)\bar{Z}_2$$

- للدائرة المغلقة CEFD يمكن تطبيق قانون كيرشوف للجهود كما يلي:

$$\bar{i}_2\,\bar{Z}_2 = \bar{i}_3\,\bar{Z}_3$$

وهو ما يعني أن المعاوقتين متوازيتان (الجهد الواقع عليهما واحد)

وبالتالي يمكن حساب التيار $\bar{i}_3$ كما يلي:

$$\bar{i}_3 = \frac{\bar{i}_2\,\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3}$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى:

$$\bar{i}_1 = \bar{i}_2 + \frac{\bar{i}_2\,\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} = \bar{i}_2\,\frac{\left(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\right)}{\bar{Z}_3}$$

وهكذا يمكن حساب التيار $\bar{i}_2$ كما يلي:

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_1\,\frac{\bar{Z}_3}{\left(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\right)}$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية:

$$\bar{E} = \bar{i}_1\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4\right) + \bar{i}_1\left(\frac{\bar{Z}_3\bar{Z}_2}{\left(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\right)}\right) = \bar{i}_1\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 + \frac{\bar{Z}_3\bar{Z}_2}{\left(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\right)}\right)$$

وهكذا يمكن حساب التيار $\bar{i}$ كما يلي:

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{E}}{\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 + \frac{\bar{Z}_3\bar{Z}_2}{\left(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\right)}\right)}$$

$$\bar{i}_1 = \frac{110\,\mathrm{V}\,\angle 0^\circ}{\left(5\,\Omega\,\angle 10^\circ + 10\,\Omega\,\angle -10^\circ + \frac{\left(10\,\Omega\,\angle -10^\circ\right)\cdot\left(5\,\Omega\,\angle 10^\circ\right)}{\left(10\,\Omega\,\angle -10^\circ\right) + \left(5\,\Omega\,\angle 10^\circ\right)}\right)}$$

$$\bar{i}_1 = \frac{110\,V \angle 0°}{\left(5\,\Omega \angle 10° + 10\,\Omega \angle -10° + \frac{\left(50\,\Omega^2 \angle 0°\right)}{(9.85 - j1.74)\Omega + (4.92 + j0.87)\Omega}\right)}$$

$$\bar{i}_1 = \frac{110\,V \angle 0°}{\left(5\,\Omega \angle 10° + 10\,\Omega \angle -10° + \frac{\left(50\,\Omega^2 \angle 0°\right)}{(14.77 - j\,0.87)\,\Omega}\right)}$$

$$\bar{i}_1 = \frac{110\,V \angle 0°}{\left(5\,\Omega \angle 10° + 10\,\Omega \angle -10° + \frac{\left(50\,\Omega^2 \angle 0°\right)}{(14.8\,\Omega \angle -3.37°\,)}\right)}$$

$$\bar{i}_1 = \frac{110\,V \angle 0°}{(5\,\Omega \angle 10° + 10\,\Omega \angle -10° + 3.38\,\Omega \angle 3.37°)}$$

$$\bar{i}_1 = \frac{110\,V \angle 0°}{((4.92 + j\,0.87)\Omega + (9.85 - j1.74)\Omega + (3.37 + j\,0.2)\Omega)}$$

$$\bar{i}_1 = \frac{110\,V \angle 0°}{(18.14 - j\,0.67)\,\Omega} = \frac{110\,V \angle 0°}{18.15\,\Omega \angle -2.12°} = 6.05\,A \angle 2.12°$$

ثم بالتعويض في قيمة التيار $\bar{i}_2$:

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_1 \frac{\overline{Z}_3}{\left(\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2\right)} = (6.05\,A \angle 2.12°) \cdot \left(\frac{(10\,\Omega \angle -10°)}{((10\,\Omega \angle -10°) + (5\,\Omega \angle 10°))}\right)$$

$$\bar{i}_2 = (6.05\,A \angle 2.12°) \cdot \left(\frac{(10\,\Omega \angle -10°)}{((9.85 - j1.74)\,\Omega + (4.92 + j\,0.87)\,\Omega)}\right) =$$

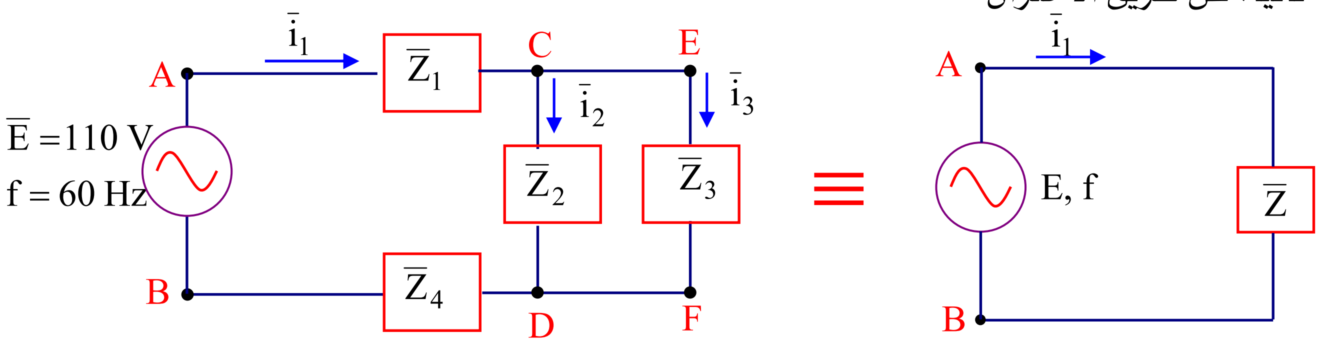
$$\bar{i}_2 = (6.05\,A \angle 2.12°) \cdot \left(\frac{(10\,\Omega \angle -10°)}{(14.77 - j0.87)}\right) =$$

$$\bar{i}_2 = (6.05\text{ A } \angle 2.12°) \cdot \left(\frac{10\ \Omega \angle -10°}{14.8\ \Omega \angle -3.4°}\right) = 4.09\text{ A } \angle -4.5°$$

ثم بالتعويض في قيمة التيار $\bar{i}_3$:

$$\bar{i}_3 = \frac{\bar{i}_2\ \bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} = \frac{(4.09\text{ A } \angle -4.5°)\cdot(5\ \Omega \angle 10°)}{10\ \Omega \angle -10°} = 2.05\text{ A } \angle 15.5°$$

ثانيا: عن طريق الاختزال



شكل (٣- ٣٠) طريقة الاختزال

يمكن كما هو مبين بالشكل (٣- ٣٠)، اختزال الدائرة إلى معاوقة واحدة تحتوي على المعاوقتين Z_2, Z_3 موصلتين معاً على التوازي وموصلتين على التوالي مع المعاوقتين Z_1, Z_4 وهكذا تكون قيمة المعاوقة المكافئة Z كالآتي:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 + \frac{\bar{Z}_2\ \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

وبالتالي يكون التيار الكلي المار في هذه المعاوقة هو التيار $\bar{i}_1$، الذي يمكن حساب قيمته كالآتي:

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{E}}{\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 + \frac{\bar{Z}_3 \bar{Z}_2}{(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2)}\right)}$$

ويلاحظ أن هذه المعادلة هي نفس معادلة التيار $\bar{i}_1$ في طريقة كيرشوف السابقة، وبالتالي تكون قيمة التيار $\bar{i}_1$ ، كما تم حسابها سابقاً كالآتي:

$$\bar{i}_1 = 6.05 \text{ A} \angle 2.12°$$

و للحصول على قيمة التيار $\bar{i}_2$ ، نستخدم قانون تقسيم التيار كما يلي:

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_1 \frac{\bar{Z}_3}{(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2)}$$

ويلاحظ أن هذه المعادلة هي نفس معادلة التيار $\bar{i}_2$ في طريقة كيرشوف السابقة، وبالتالي تكون قيمة التيار $\bar{i}_2$ ، كما تم حسابها سابقاً كالآتي:

$$\bar{i}_2 = 4.09 \text{ A} \angle -4.5°$$

و للحصول على قيمة التيار $\bar{i}_3$ ، يمكن استخدام عدة طرق لذلك:

- نستخدم قانون تقسيم التيار:

$$\bar{i}_3 = \bar{i}_1 \frac{\bar{Z}_2}{(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)}$$

$$\bar{i}_3 = (6.05 \text{ A} \angle 2.12) \frac{5\ \Omega \angle 10°}{(14.8\ \Omega \angle -3.4°)} = 2.05 \text{ A} \angle 15.5°$$

يلاحظ هنا أننا استخدمنا القيمة $\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3$ المحسوبة في طريقة كيرشوف

- نستخدم قانون كيرشوف للتيارات:

$$\because \bar{i}_1 = \bar{i}_2 + \bar{i}_3$$

$$\therefore \bar{i}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2$$

$$\therefore \bar{i}_3 = (6.05 \text{ A} \angle 2.12) - (4.09 \text{ A} \angle -4.5°) =$$

$$\therefore \bar{i}_3 = (6.05 + j0.22) - (4.08 - j\,0.32) = 1.97 + j0.54 = 2.05 \text{ A} \angle 15.5°$$

- نستخدم قانون مساواة الجهد على المعاوقات الموازية:

$$\bar{i}_3\ \bar{Z}_3 = \bar{i}_2\ \bar{Z}_2$$

وبقسمة الطرفين على $\bar{Z}_3$ ، نحصل على:

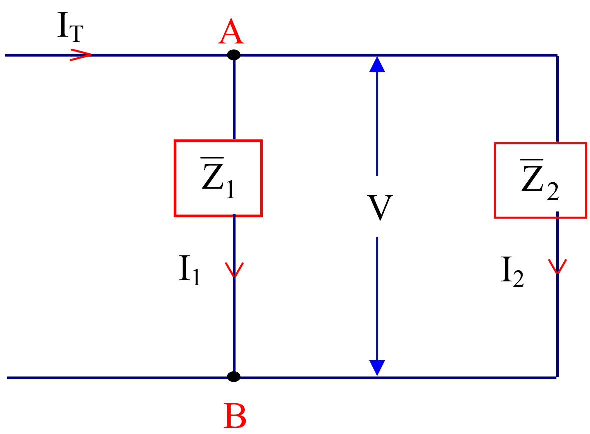
$$\therefore \bar{i}_3 = \frac{\bar{i}_2\ \bar{Z}_2}{\bar{Z}_3}$$

ويلاحظ أن هذا القانون هو نفسه المستخدم في الحل السابق بطريقة كيرشوف حيث كانت النتيجة:

$$\therefore \bar{i}_3 = 2.05\ A\ \angle 15.5°$$

٣- ١٠ مقسم التيار (قانون تجزؤ التيار) Current Divider

بالرجوع إلى شكل (٣- ٣١) نجد أن التيار الكلي I_T يتفرع إلى تيارين فرعين I_1, I_2.



شكل (٣- ٣١) تجزئ التيار بين المعاوقات $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$

ويمكن استنتاج العلاقة بين التيار الكلي I_T والتيارات الفرعية I_1, I_2 كالآتي:

$$\because (\bar{I}_T) = (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \qquad (٣\text{-}٦٧)$$

$$\therefore (\bar{I}_2) = (\bar{I}_T - \bar{I}_1) \qquad (٣\text{-}٦٨)$$

$$\because \bar{V} = \bar{I}_1\ \bar{Z}_1 = \bar{I}_2\ \bar{Z}_2 = \bar{I}_T\ \bar{Z} \qquad (٣\text{-}٦٩)$$

$$\therefore \bar{V} = \bar{I}_1\ \bar{Z}_1 = (\bar{I}_T - \bar{I}_1)\bar{Z}_2 \qquad (٣\text{-}٧٠)$$

$$\bar{I}_1\ \bar{Z}_1 + \bar{I}_1\ \bar{Z}_2 = \bar{I}_T\ \bar{Z}_2 \qquad (٣\text{-}٧١)$$

$$\bar{I}_1\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2\right) = \bar{I}_T\ \bar{Z}_2 \qquad (٣\text{-}٧٢)$$

$$\therefore \bar{I}_1 = \bar{I}_T\ \frac{\bar{Z}_2}{\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2\right)} \qquad (٣\text{-}٧٣)$$

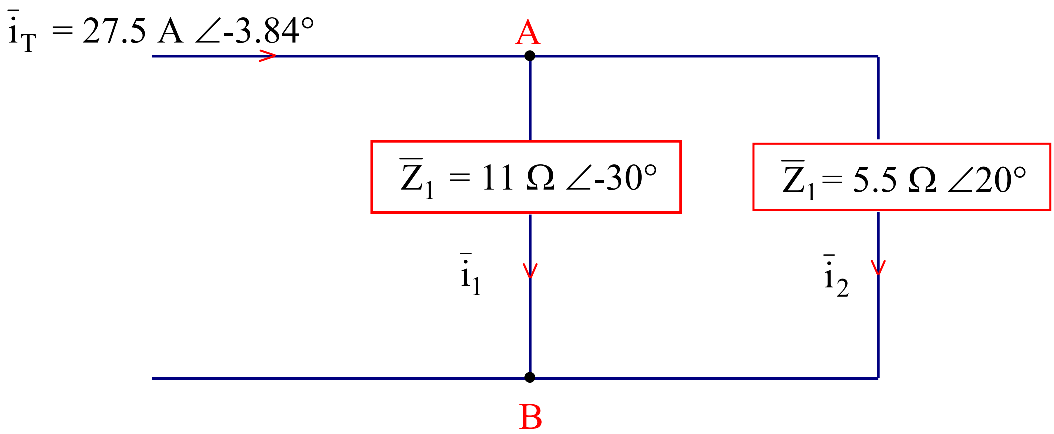
وبالمثل:

$$\therefore \bar{I}_2 = \bar{I}_T\ \frac{\bar{Z}_1}{\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2\right)} \qquad (٣\text{-}٧٤)$$

وهذا هو قانون تقسيم التيارات في الدوائر المتوازية، ويلاحظ التشابه بين هذه الصورة وصورة تقسيم التيار في دوائر التيار المستمر، مع ملاحظة أن المعادلات هنا معادلات اتجاهية.

مثال (٣- ١٣)

في الشكل المقابل (٣- ٣٢)، احسب التيارات الفرعية $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$.



شكل (٣- ٣٢) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ١٣)

الحل

بتطبيق قانون تقسيم التيار (٣- ٧٣) و (٣- ٧٤)، يمكن أن نحصل على التيارات الفرعية I_1, I_2 كالآتي:

$$\bar{i}_1 = \bar{i}_T\ \frac{\bar{Z}_2}{\left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2\right)} = (27.5\ \text{A} \angle -3.84°) \times \left(\frac{5.5\ \Omega \angle 20°}{11\ \Omega \angle -30° + 5.5\ \Omega \angle 20°}\right)$$

$$\bar{i}_1 = (27.5\ \text{A} \angle -3.84°) \times \left(\frac{5.5\ \Omega \angle 20°}{(9.53 - j\,5.5) + (5.17 + j\,1.88)} \right)$$

$$\bar{i}_1 = (27.5\ \text{A} \angle -3.84°) \times \left(\frac{5.5\ \Omega \angle 20°}{14.7 - j\,3.62} \right)$$

$$\bar{i}_1 = (27.5\ \text{A} \angle -3.84°) \times \left(\frac{5.5\ \Omega \angle 20°}{15.14\ \Omega \angle -13.84°} \right)$$

$$\bar{i}_1 = (27.5\ \text{A} \angle -3.84°) \times (0.363 \angle 33.84°) = 10\ \text{A} \angle 30°$$

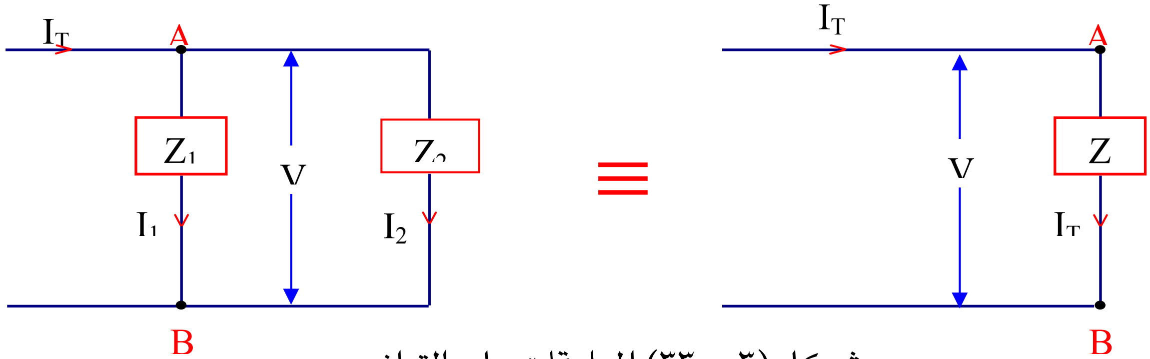
$$\bar{i}_2 = \bar{i}_T \frac{\bar{Z}_1}{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)} = (27.5\ \text{A} \angle -3.84) \times \left(\frac{11\,\Omega \angle -30°}{11\,\Omega \angle -30° + 5.5\ \Omega \angle 20°} \right)$$

$$\bar{i}_2 = (27.5\ \text{A} \angle -3.84) \times \left(\frac{11\,\Omega \angle -30°}{15.14\ \Omega \angle -13.84°} \right) = 20\ \text{A} \angle -20°$$

ونلاحظ أن قيم التيارات الفرعية المستنتجة في هذا المثال هي نفس القيم في المثال (٤- ٣) مما يدلل على صحة تطبيق قانون تقسيم التيارات.

٣- ١٠- ١ توصيل المعاوقات على التوازي Parallel Connection

بالرجوع إلى شكل (٣- ٣٢) للمثال (٣- ١٣)، نجد أن المعاوقتين Z_1, Z_2 موصلتين معا بطريقة التوازي (راجع هندسة كهربائية - ١)، فنلاحظ أن أطراف بداية المعاوقتين موصلتان معاً وكذلك أطراف نهايتهما موصلتان معاً، وليس هناك في المنتصف أية توصيلات أخرى وأن الجهد الواقع على كل معاوقة هو نفس الجهد V وهذه هي شروط توصيل التوازي. ويمكن الاستعاضة عن المعاوقتين المتوازيتين بمعاوقة واحدة Z مكافئة لهما كما هو مبين بالشكل (٣- ٣٣)، ويمكن حساب قيمتها كما يلي:



شكل (٣- ٣٣) المعاوقات على التوازي

وبهذا يمكن كتابة الجهد بصورة اتجاهية كالآتي:

$$\overline{V} = \bar{I}_1\ \overline{Z}_1 = \bar{I}_2\ \overline{Z}_2 = \bar{I}_T\ \overline{Z} \qquad (٣-٧٥)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف للتيار:

$$\left(\bar{I}_T\right) = \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2\right) \qquad (٣-٧٦)$$

وبالتعويض عن قيمة I_2 في المعادلة ( )، نحصل على:

$$\left(\frac{\overline{V}}{\overline{Z}}\right) = \left(\frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} + \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_2}\right) \qquad (٣-٧٧)$$

وبقسمة الطرفين على Z، نحصل على الآتي:

$$\left(\frac{1}{\overline{Z}}\right) = \left(\frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2}\right) \qquad (٣-٧٨)$$

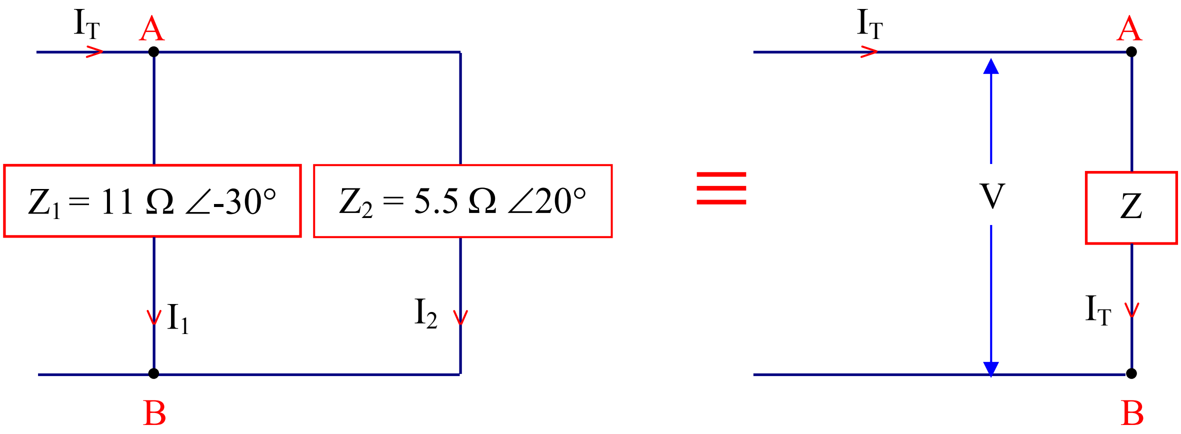
$$\left(\frac{1}{\overline{Z}}\right) = \left(\frac{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}\right) \qquad (٣-٧٩)$$

$$\left(\overline{Z}\right) = \left(\frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}\right) \qquad (٣-٨٠)$$

وهذه الصورة هي نفس الصورة في حالة دوائر التيار المستمر مع الأخذ في الاعتبار هنا أن هذه المعادلة هي معادلة اتجاهية.

مثال (٣- ١٤)

للمثال (٣- ١٣) احسب قيمة المعاوقة المكافئة للمعاوقتين Z_1 & Z_2.



شكل (٣- ٣٤) الدائرة الكهربائية لمثال (٣- ١٤)

الحل

لحساب المعاوقة المكافئة لهما Z نطبق القانون (٣- ٨٥) كالآتي:

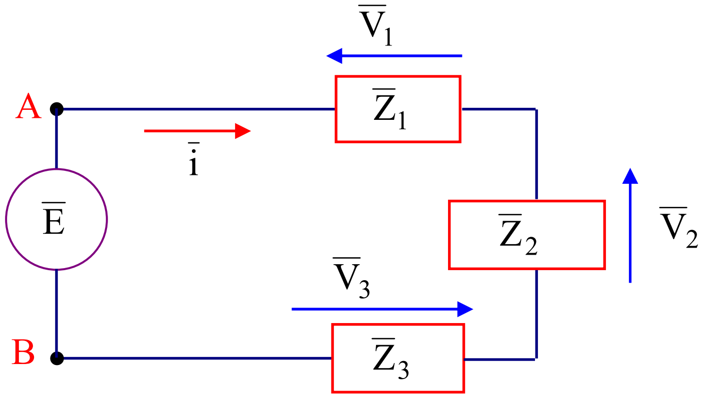
$$(\overline{Z}) = \left(\frac{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}\right) = \frac{11\,\Omega\angle -30° \times 5.5\,\Omega\ \angle 20°}{11\,\Omega\angle -30° + 5.5\,\Omega\ \angle 20°} = \frac{11\,\Omega \times 5.5\,\Omega\angle -30° + 20°}{(9.52 - j\,5.5) + (5.17 + j\,1.88)}$$

$$(\overline{Z}) = \frac{60.5\angle -10°}{(14.69 - j\,3.62)} = \frac{60.5\,\Omega^2\angle -10°}{15.13\,\Omega\angle -13.84°}$$

$$(\overline{Z}) = \frac{60.5\,\Omega^2}{15.13\,\Omega}\angle(-10° + 13.84°) = 4\,\Omega\ \angle 3.84°$$

٣- ١١ مقسم الجهد (قانون تجزؤ الجهود) **Potential Divider**

مجموع الجهود على المعاوقات الثلاثة المتوالية Z_1, Z_2& Z_3 في دائرة كهربية، شكل (٣- ٣٥) يساوي جهد المصدر E، وهذا يعني أن الجهد V يتقسم ما بين المعاوقات الثلاثة حسب قيم معاوقتها، وهو ما سوف نثبته كالتالي:



شكل (٣- ٣٥) تجزؤ الجهود في الدائرة الكهربائية المتوالية

حسب قانون أوم:

$$\overline{V}_1 = \overline{i} \cdot \overline{Z}_1 \qquad (٣\text{-}٨١)$$

$$\overline{V}_2 = \overline{i} \cdot \overline{Z}_2 \qquad (٣\text{-}٨٢)$$

$$\overline{V}_3 = \overline{i} \cdot \overline{Z}_3 \qquad (٣\text{-}٨٣)$$

حسب قانون كيرشوف للجهود:

$$\overline{E} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = \overline{i} \cdot \left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3\right) \qquad (٣\text{-}٨٤)$$

وبقسمة $\overline{V}_1$ على $\overline{E}$، نحصل على:

$$\frac{\overline{V}_1}{\overline{E}} = \frac{\overline{Z}_1}{\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3\right)} \qquad (٣\text{-}٨٥)$$

وبضرب الطرفين في $\overline{E}$، نحصل على:

$$\overline{V}_1 = \overline{E} \cdot \left(\frac{\overline{Z}_1}{\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3\right)}\right) \qquad (٣\text{-}٨٦)$$

وبالمثل بقسمة الجهد $\overline{V}_2$ على $\overline{E}$، نحصل على:

$$\frac{\overline{V}_2}{\overline{E}} = \frac{\overline{Z}_2}{\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3\right)} \qquad (٣\text{-}٨٧)$$

وبضرب الطرفين × $\overline{E}$ ، نحصل على:

$$\overline{V}_2 = \overline{E} \cdot \left(\frac{\overline{Z}_2}{(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3)} \right) \qquad (٣-٨٨)$$

وبالمثل بقسمة الجهد $\overline{V}_3$ على $\overline{E}$ ، نحصل على:

$$\frac{\overline{V}_3}{\overline{E}} = \frac{\overline{Z}_3}{(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3)} \qquad (٣-٨٩)$$

وبضرب الطرفين في $\overline{E}$ ، نحصل على:

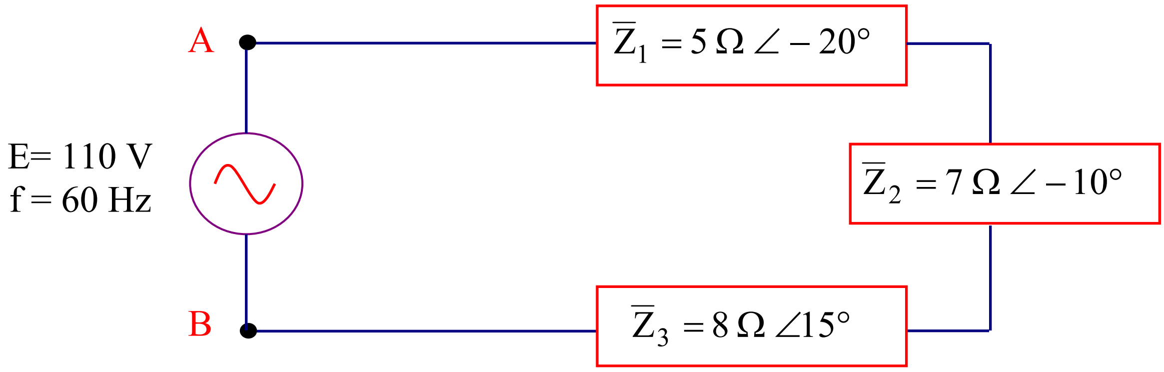
$$\overline{V}_3 = \overline{E} \cdot \left(\frac{\overline{Z}_3}{(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3)} \right) \qquad (٣-٩٠)$$

وعلى وجه العموم يمكن أن نقول أن:

$$\overline{V}_x = \overline{E} \cdot \left(\frac{\overline{Z}_x}{(\overline{Z}_T)} \right)$$

مثال (٣- ١٥)

في شكل (٣- ٣٦) احسب الجهد على كل معاوقة من المعاوقات الثلاثة باستخدام قانون تقسيم الجهود.



شكل (٣- ٣٦) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ١٥)

الحل

المعاوقات الثلاثة موصلة على التوالي، إذن يمكننا استخدام قانون تجزؤ الجهود كما يلي:

$$\overline{V}_1 = \overline{E}\cdot\left(\frac{\overline{Z}_1}{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3)}\right)$$

$$\overline{V}_1 = (110\ V\angle 0°)\cdot\left(\frac{5\ \Omega\angle-20°}{((5\ \Omega\angle-20°)+(7\ \Omega\angle-10°)+(8\ \Omega\angle 15°))}\right)$$

$$\overline{V}_1 = (110\ V\angle 0°)\cdot\left(\frac{5\ \Omega\angle-20°}{((5\ \Omega\angle-20°)+(7\ \Omega\angle-10°)+(8\ \Omega\angle 15°))}\right)$$

$$\overline{V}_1 = (110\ V\angle 0°)\cdot\left(\frac{5\ \Omega\angle-20°}{((4.7-j1.71)\Omega+(6.9-j1.22)\Omega+(7.7+j\,2.1)\Omega)}\right)$$

$$\overline{V}_1 = (110\ V\angle 0°)\cdot\left(\frac{5\ \Omega\angle-20°}{(19.32\ \Omega\angle-2.46°)}\right) = 28.47\ V\angle-17.54°$$

$$\overline{V}_2 = \overline{E}\cdot\left(\frac{\overline{Z}_2}{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3)}\right) = (110\ V\angle 0°)\cdot\left(\frac{7\ \Omega\angle-10°}{(19.32\ \Omega\angle-2.46°)}\right)$$

$$\overline{V}_2 = 39.86\ V\angle-7.54°$$

$$\overline{V}_3 = \overline{E}\cdot\left(\frac{\overline{Z}_3}{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3)}\right) = (110\ V\angle 0°)\cdot\left(\frac{8\ \Omega\angle 15°}{(19.32\ \Omega\angle-2.46°)}\right)$$

$$\overline{V}_3 = 45.55\ V\angle 17.46°$$

ولتأكيد صحة الحل نجمع الجهود V_1, V_2, V_3 كالآتي:

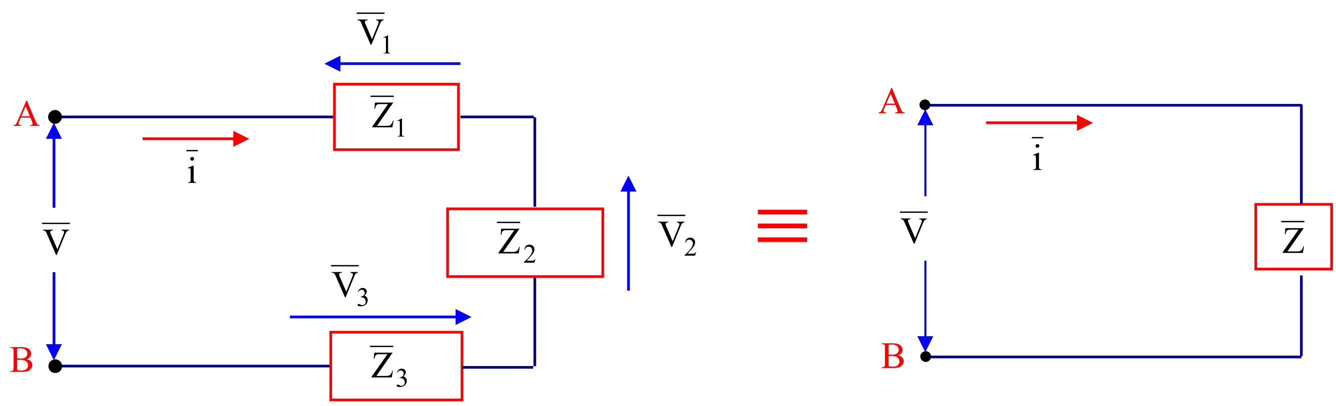
$$\overline{E} = \overline{V}_1+\overline{V}_2+\overline{V}_3 = 28.47\angle-17.54° + 39.86\angle-7.54° + 45.55\angle 17.46°$$

$$\overline{E} = (27.1-j\,8.5)\,V + (39.5-j\,5.2) + (43.4+j13.7) = (110-j\,0) = 110\ V\angle 0°$$

٣- ١١- ١ توصيل المعاوقات على التوالي Series Connection

بالرجوع إلى شكل (٣- ٣٦) للمثال (٣- ١٥)، نجد أن المعاوقات $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ موصلة معا بطريقة التوالي (راجع هندسة كهربائية - ١)، فنلاحظ أن طرف نهاية المعاوقة $\bar{Z}_1$ موصل مع طرف بداية المعاوقة $\bar{Z}_2$ وكذلك طرف نهاية المعاوقة $\bar{Z}_2$ موصل مع طرف بداية المعاوقة $\bar{Z}_3$ وأن نقط التوصيل بين المعاوقات لا يتصل بها أية معاوقة أخرى وأن التيار المار في المعاوقات الثلاثة هو نفس التيار $\bar{i}$ وهذه هي شروط توصيل التوالي.

ويمكن الاستعاضة عن المعاوقات المتوازية بمعاوقة واحدة $\bar{Z}$ مكافئة لها كما هو مبين بالشكل (٣- ٣٧)، ويمكن حساب قيمتها كما يلي:



شكل (٣- ٣٧) توصيل المعاوقات على التوالي

من قانون كيرشوف للجهود الجهد $\bar{V}$ يساوي مجموع الجهود الفرعية كما يأتي:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3$$

وبمساواة الجهد بين النقطتين A, B في الحالتين، نحصل على ما يأتي:

$$\bar{V} = \bar{i}\,\bar{Z}_1 + \bar{i}\,\bar{Z}_2 + \bar{i}\,\bar{Z}_3 = \bar{i}\,\bar{Z} \qquad (٣\text{-}٩١)$$

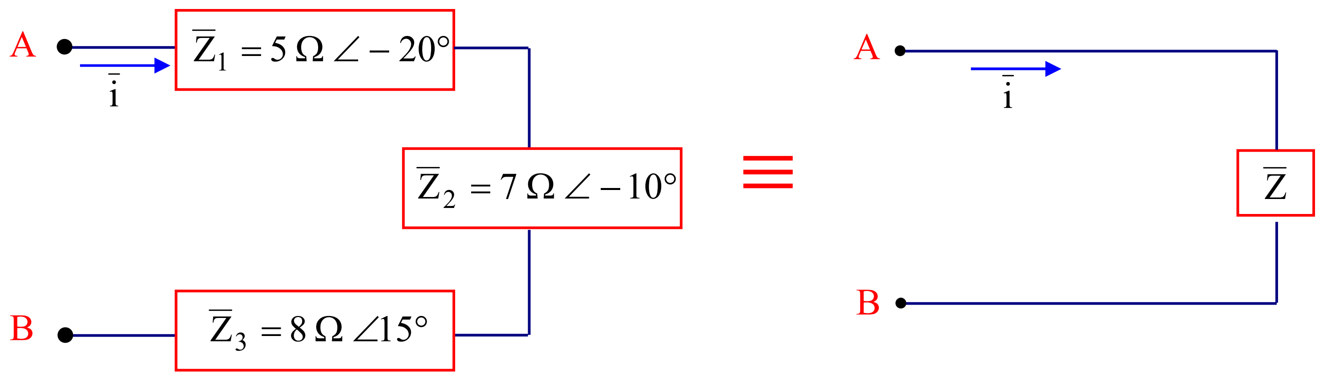
وبقسمة الطرفين على التيار $\bar{i}$ ، نحصل على الآتي:

$$\therefore \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = \bar{Z} \qquad (٣\text{-}٩٢)$$

أي أن المعاوقة المكافئة لمجموعة من المعاوقات المتوالية تساوي مجموع هذه المعاوقات ويلاحظ هنا أيضاً أن المجموع اتجاهي وليس مجموعاً جبرياً.

مثال (٣- ١٦)

في المثال (٣- ١٥) احسب المعاوقة المكافئة للدائرة.



شكل (٣- ٣٨) الدائرة الكهربائية للمثال (٣- ١٦)

الحل

حساب المعاوقة المكافئة للثلاث معاوقات في الدائرة الكهربية كالآتي:

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = 5\,\Omega\angle-20^\circ + 7\,\Omega\angle-10^\circ + 8\,\Omega\angle15^\circ$$

$$\bar{Z}_{eq} = (4.7 - j1.71)\,\Omega + (6.9 - j1.22)\,\Omega + (7.7 + j2.1)\,\Omega$$

$$\bar{Z}_{eq} = (19.3 - j0.83) = 19.32\,\Omega\angle-2.46^\circ$$

تدريبات على الوحدة الثالثة

(١) استنتج قيمة المعاوقة الكلية لدائرة مكونة من مقاومة وملف على التوالي واحسب زاويتها.

(٢) استنتج قيمة المعاوقة الكلية لدائرة مكونة من مقاومة ومكثف على التوالي واحسب زاويتها.

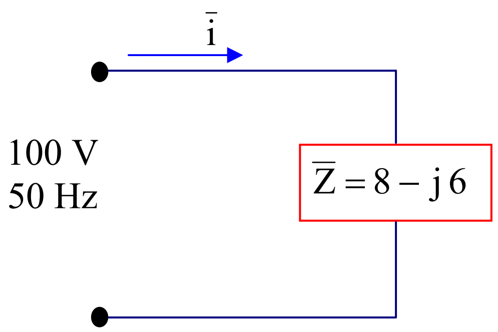
(٣) استنتج قيمة المعاوقة الكلية لدائرة مكونة من مقاومة وملف ومكثف على التوالي واحسب زاويتها.

(٤) احسب قيمة المعاوقة الكلية لدائرة مكونة من مقاومة (5Ω) على التوالي مع ملف$(5\ mH)$ واحسب زاويتها.إذا كان التردد $f = 50\ Hz$

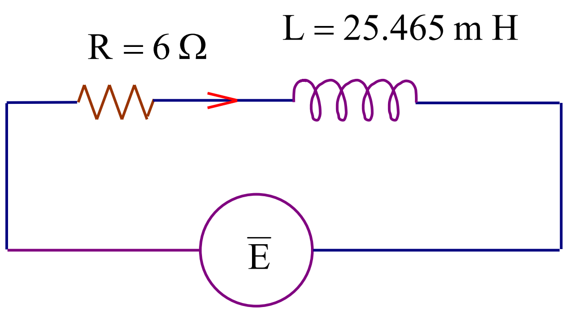
(٥) احسب قيمة المعاوقة الكلية لدائرة مكونة من مقاومة (15Ω) على التوالي مع مكثف$(1\mu f)$ واحسب زاويتها. $f = 50\ Hz$

(٦) احسب قيمة المعاوقة الكلية لدائرة مكونة من مقاومة أومية (20Ω) على التوالي مع ملف$(5\ mH)$ على التوالي مع مكثف$(1\mu f)$ واحسب زاويتها. إذا كان التردد $f = 50\ Hz$

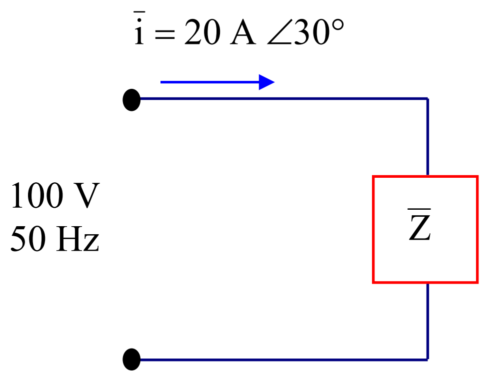
(٧) احسب قيمة التيار المسحوب من المصدر للشكل التالي، واحسب مكونات المعاوقة $\bar{Z}$.



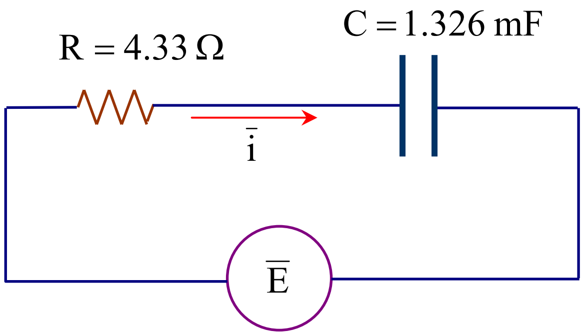
(٨) احسب قيمة التيار المسحوب من المصدر للشكل التالي، إذا كانت قيمة جهد المصدر $\bar{E} = 110\ V\ \angle 0°$ ، علماً بأن قيمة التردد تساوي $60\ Hz$.



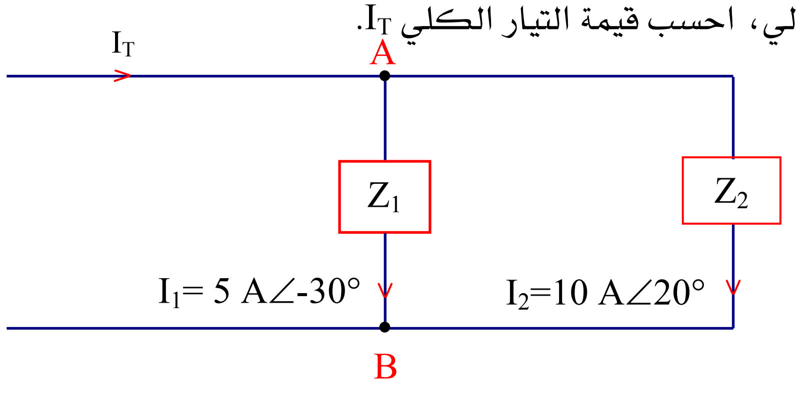
٩. احسب قيمة المعاوقة $\overline{Z}$ للشكل التالي واحسب مكوناتها.



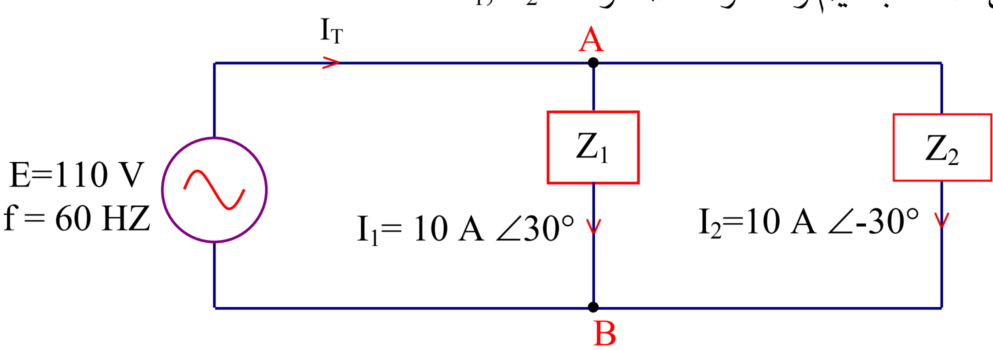
١٠. للشكل التالي، احسب قيمة التيار المسحوب من المصدر $\overline{i}$ ، إذا كانت قيمة جهد المصدر $\overline{E} = 110\ V\ \angle 0°$ ، علماً بأن قيمة تردد المصدر يساوي 50 Hz.



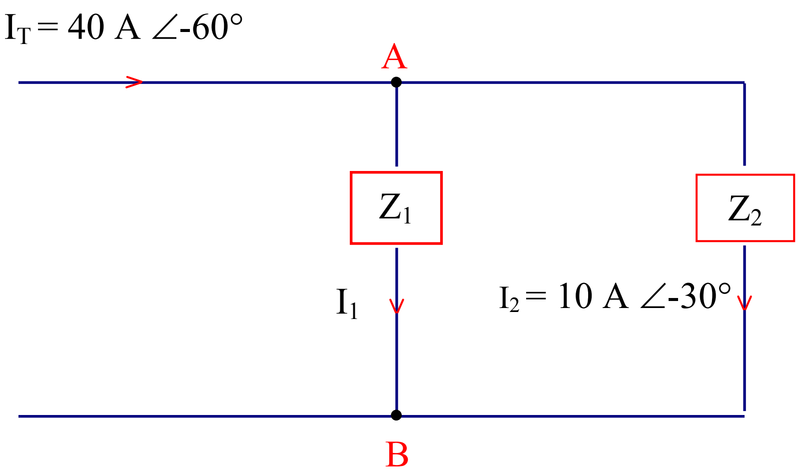
١١. للشكل التالي، احسب قيمة التيار الكلي I_T.



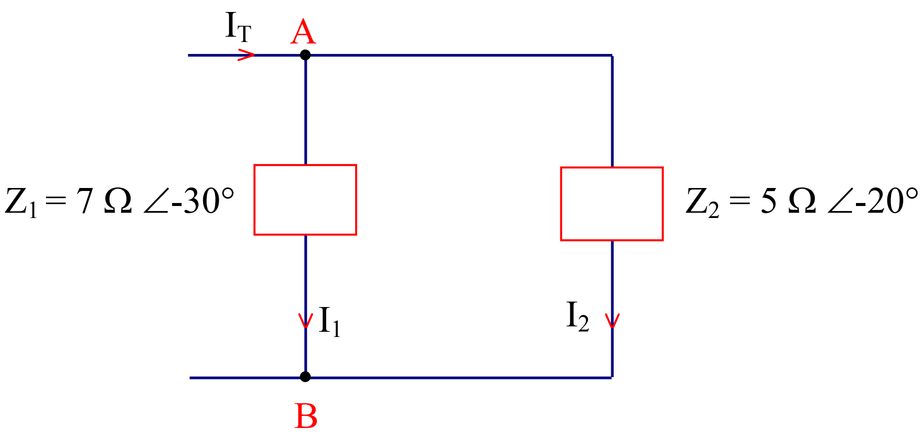
١٢. للشكل التالي، احسب قيم ومكونات المعاوقات Z_1, Z_2



١٣.في الشكل التالي، احسب قيمة التيار الفرعي I_1.



١٤. احسب قيمة المعاوقة المكافئة للشكل التالي.



هندسة كهربائية- ٢

النظريات الأساسية المستخدمة في دوائر التيار المتردد

الأهداف العامة للوحدة الرابعة

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة، يكون الطالب قادراً على معرفة:

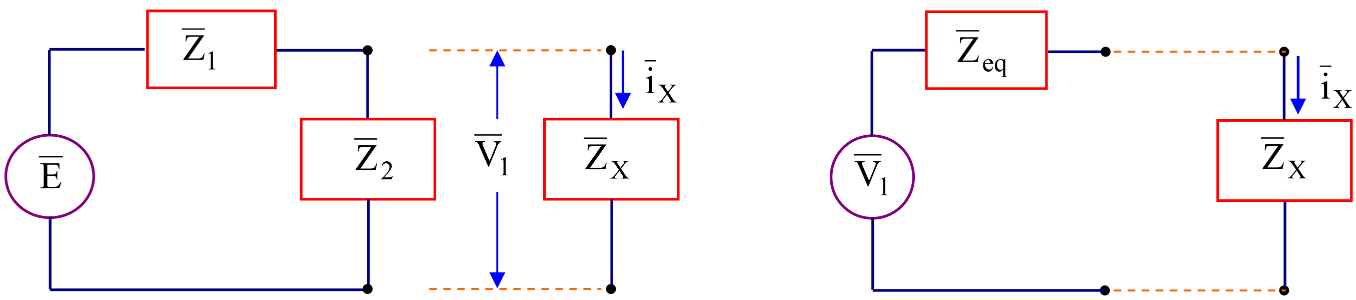
- كيفية تطبيق نظرية ثفنن لتحليل الدوائر الكهربائية للتيار المتردد.
- كيفية تطبيق طريقة الحلقة المغلقة لتحليل الدوائر الكهربائية للتيار المتردد.
- كيفية تطبيق نظرية التركيب لتحليل الدوائر الكهربائية للتيار المتردد.

٤- ١ مقدمة :

سنتناول في هذا الباب مجموعة من النظريات من حيث تطبيقها في دوائر التيار المتردد كما تمت دراستها في (هندسة كهربية- ١) . وفيما يتعلق باستخدام قوانين أوم ، وكيرشوف للجهد والتيار، فإن طرق الحل هذه يمكن تطبيقها في دوائر التيار المتردد ، المحتوية على عناصر حثية وسعوية. وفيمايلي بعض النظريات التي تستخدم في كثير من التطبيقات:

٤- ٢نظرية ثفنن Thevinen's Theorem

تهدف نظرية ثفنن إلى إيجاد التيار في أحد أفرع الدائرة الكهربائية بطريقة مبسطة ومختصرة. وتعتمد هذه الطريقة على أنه في حالة إضافة فرع جديد $\bar{Z}_X$ للدائرة الكهربائية المبسطة (كما في شكل (٤- ١))، يمكن حساب التيار المار في هذا الفرع الجديد $\bar{i}_X$ باعتبار أن تأثير الدائرة الأصلية على الفرع الجديد هو الجهد الكهربائي $\bar{V}_1$ ومعاوقة مكافئة للدائرة الأصلية $\bar{Z}_{eq}$ تحسب من منظور الفرع الجديد للدائرة الأصلية (باعتبار معاوقة مصدر الجهد تساوي صفراً).



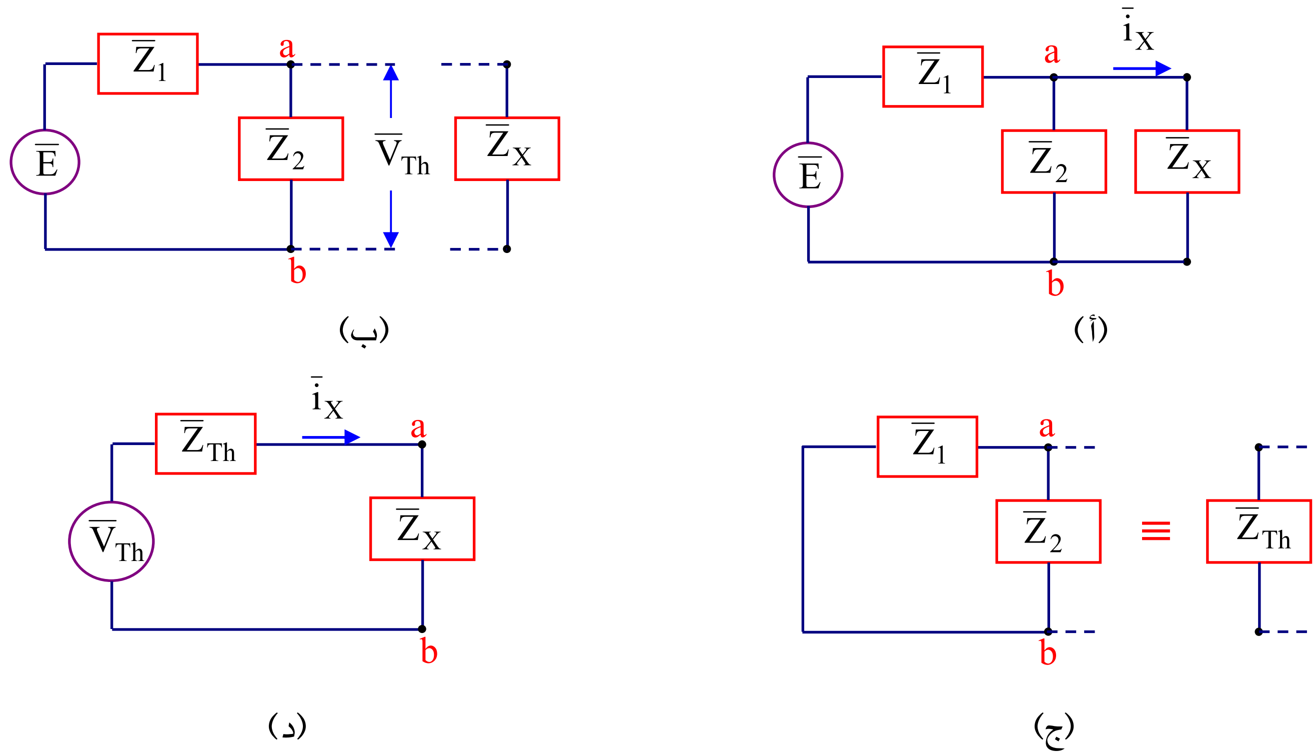
شكل (٤- ١)

وهكذا تعتمد نظرية ثفنن لحساب التيار الكهربائي في أحد أفرع الدائرة الكهربائية على الطريقة العكسية لما سبق شرحه. حيث تتم الخطوات التالية:

- يتم نزع الفرع المطلوب إيجاد التيار فيه من الدائرة الكهربائية الكاملة الموجودة في شكل (٤- ٢- أ)، واعتبار الدائرة الكهربائية بدون هذا الفرع هي الدائرة الأصلية كما هو مبين في شكل (٤- ٢ - ب).
- على الوضع الجديد يتم حساب فرق الجهد في الدائرة الكهربائية ما بين النقطتين اللتين تمثلان طرفي الفرع المنزوع (a, b) ويسمى هذا الجهد $\bar{V}_{Th}$ كما هو مبين في شكل (٤- ٢- ب).
- على هذا الوضع أيضاً يتم نزع مصدر الجهد من الدائرة وعمل دائرة قصر بين أطرافها (مكان مصدر الجهد المنزوع) كما هو مبين في شكل (٤- ٢- ج)،

- يتم حساب المعاوقة المكافئة للدائرة ما بين طرفي الفرع المنزوع (a, b) وتسمى المعاوقة المكافئة $\overline{Z}_{Th}$.
- يتم حساب التيار المطلوب $\overline{i}_X$ من الدائرة المبينة في شكل (٤- ٢- د)، باعتبار الدائرة مكونة من الفرع المنزوع $\overline{Z}_X$ على التوالي مع مصدر الجهد $\overline{V}_{Th}$ والمعاوقة $\overline{Z}_{Th}$ بتطبيق قانون أوم كما يلي:

$$\overline{i}_X = \frac{\overline{V}_{Th}}{\left(\overline{Z}_{Th} + \overline{Z}_X\right)} \qquad (١-٤)$$



شكل (٤- ٢)

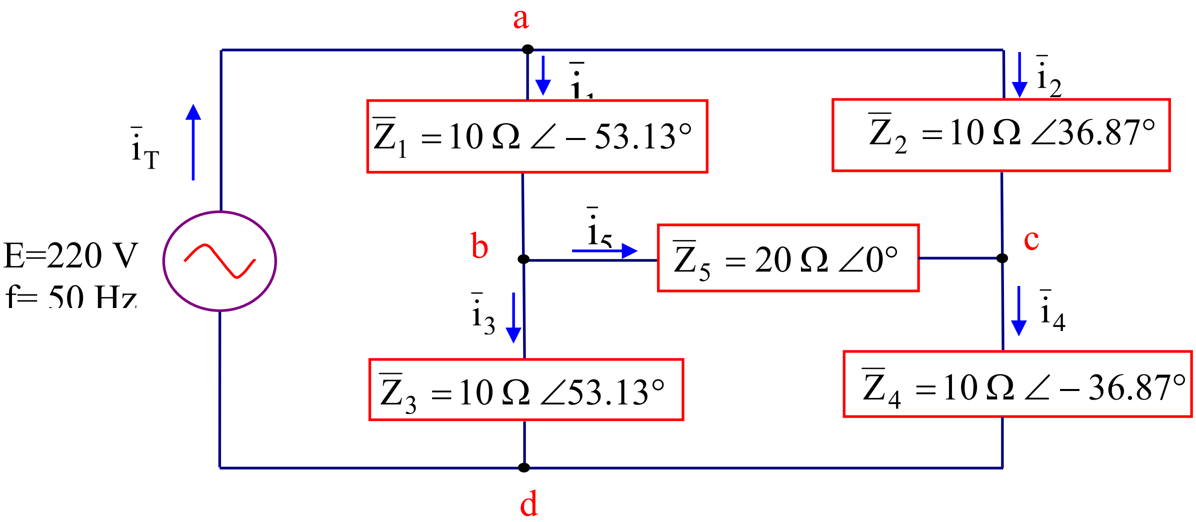
مثال (٤- ١)

في الدائرة المبينة في شكل (٤- ٣- أ) احسب قيمة التيار $\overline{i}_5$ باستخدام نظرية ثفنن.

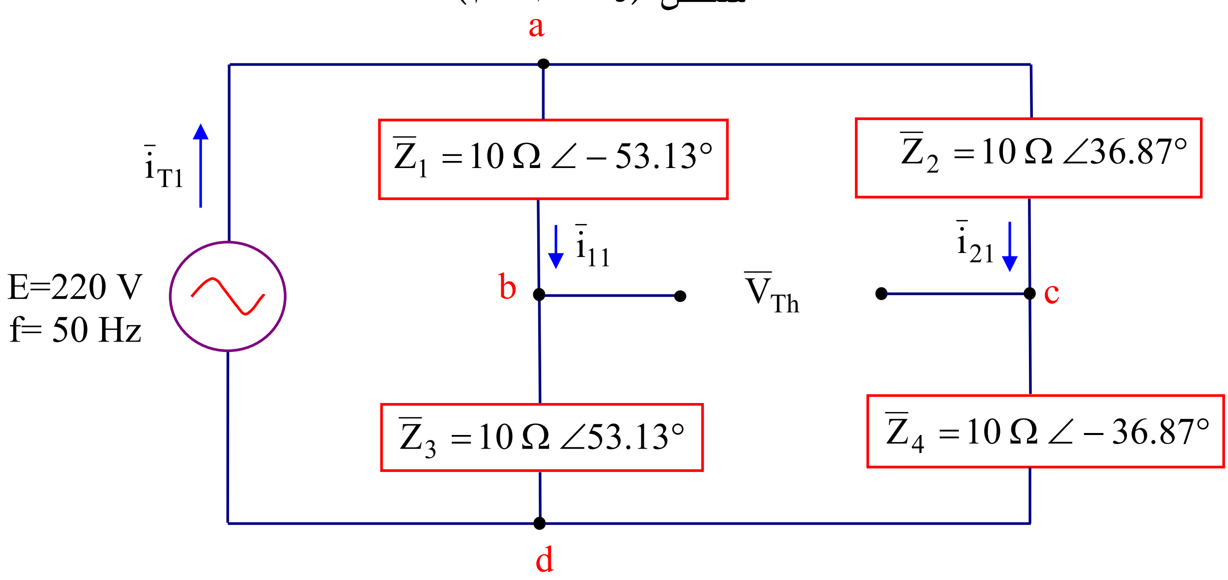
الحل

يمكن تطبيق نظرية ثفنن للحصول على التيار $\overline{i}_5$ كما يلي:

- أولاً: يتم نزع المعاوقة Z_5 وهي تمثل الفرع المطلوب إيجاد التيار فيه، فتصبح الدائرة كما هي مبينة في شكل (٤- ٣- أ).



شكل (٤- ٣- أ)



شكل (٤- ٣- ب)

ثانياً: يتم حساب الجهد $\bar{V}_{Th}$ كما هو مبين من شكل (٤- ٣ ب)، بتطبيق قانون كيرشوف للجهود كما يلي:

$$\bar{V}_{ab} + \bar{V}_{Th} + \bar{V}_{ca} = 0$$

$$\bar{V}_{ab} = \bar{i}_{11} \cdot \bar{Z}_1$$

$$\bar{V}_{ca} = -\bar{i}_{21} \cdot \bar{Z}_2 \quad , \quad \bar{V}_{Th} + \bar{i}_{11} \cdot \bar{Z}_1 - \bar{i}_{21} \cdot \bar{Z}_2 = 0 \quad , \quad \bar{V}_{Th} = \bar{i}_{21} \cdot \bar{Z}_2 - \bar{i}_{11} \cdot \bar{Z}_1$$

ولهذا يجب أولاً حساب التيارين $\bar{i}_{11}, \bar{i}_{21}$ كما يلي:

$$\bar{i}_{11} = \frac{\overline{E}}{\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3\right)} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{\left(10\ \Omega\ \angle -53.13^\circ\right) + \left(10\ \Omega\ \angle 53.13^\circ\right)}$$

$$\bar{i}_{11} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{\left(6 - j\,8\right)\Omega + \left(6 + j\,8\right)\Omega} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{\left(12 + j\,0\right)\Omega} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{12\,\Omega\,\angle 0^\circ} = 18.33\ A\ \angle 0^\circ$$

$$\bar{i}_{21} = \frac{\overline{E}}{\left(\overline{Z}_2 + \overline{Z}_4\right)} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{\left(10\ \Omega\ \angle 36.87^\circ\right) + \left(10\ \Omega\ \angle -36.87^\circ\right)}$$

$$\bar{i}_{21} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{\left(8 + j\,6\right)\Omega + \left(8 - j\,6\right)\Omega} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{\left(16 + j\,0\right)\Omega} = \frac{220\ V\ \angle 0^\circ}{16\ \Omega\ \angle 0^\circ} = 13.75\ A\ \angle 0^\circ$$

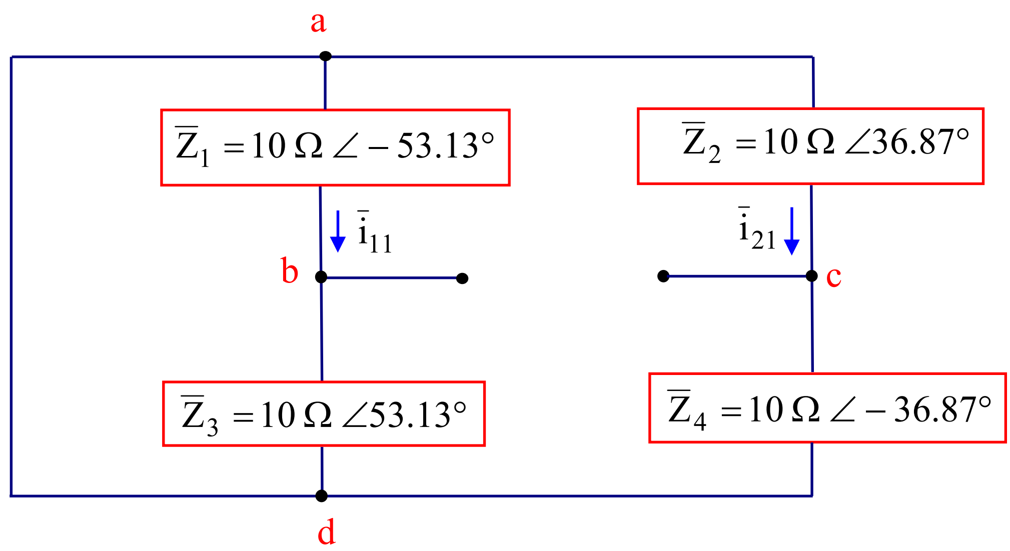
$$\overline{V}_{Th} = \left(13.75\ A\ \angle 0^\circ\right)\cdot\left(10\ \Omega\ \angle 36.87^\circ\right) - \left(18.33\ A\ \angle 0^\circ\right)\cdot\left(10\ \Omega\ \angle -53.13^\circ\right)$$

$$\overline{V}_{Th} = \left(137.5\ V\ \angle 36.87^\circ\right) - \left(183.3\ V\ \angle -53.13^\circ\right)$$

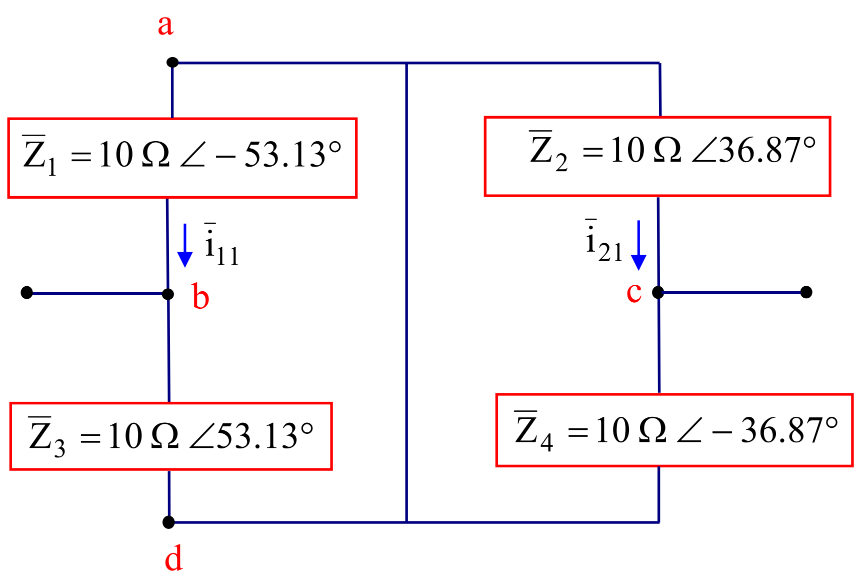
$$\overline{V}_{Th} = \left(110 + j\,82.5\right)V - \left(110 - j\,146.64\ \right)V$$

$$\overline{V}_{Th} = \left(0 + j\,229.14\right)V = 229.14\ V\ \angle 90^\circ$$

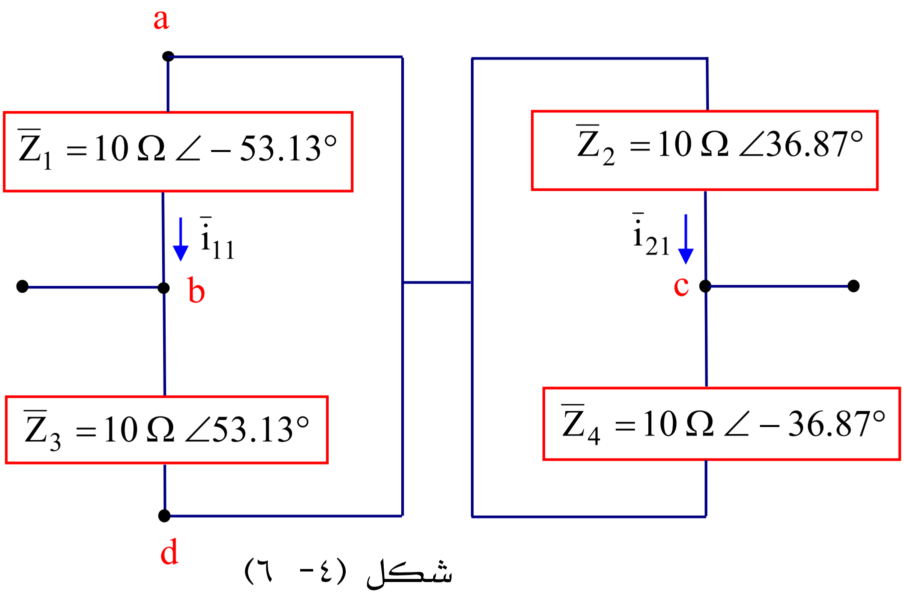
- لحساب المعاوقة المكافئة $\overline{Z}_{Th}$ نقوم بنزع مصدر الجهد من الدائرة وعمل دائرة قصر بين أطرافها (مكان مصدر الجهد المنزوع) ثم نحسب المعاوقة المكافئة للدائرة بين الطرفين b, c، كما هو مبين بالشكل (٤- ٤). و شكل (٤- ٥) وشكل (٤- ٦) يوضحان تبسيط هذه الدائرة حيث قصر الدائرة بين النقطتين a, d يؤدي إلى أن المعاوقتين $\overline{Z}_1, \overline{Z}_3$ موصلتان على التوازي ويكونان مجموعة أولى، كذلك المعاوقتين $\overline{Z}_2, \overline{Z}_4$ موصلتان على التوازي ويكونان مجموعة ثانية، والمجموعتان الأولى والثانية موصلتان على التوازي.


a
$\bar{Z}_1 = 10\,\Omega\,\angle -53.13°$
$\bar{Z}_2 = 10\,\Omega\,\angle 36.87°$
$\bar{i}_{11}$
$\bar{i}_{21}$
b
c
$\bar{Z}_3 = 10\,\Omega\,\angle 53.13°$
$\bar{Z}_4 = 10\,\Omega\,\angle -36.87°$
d

شكل (٤- ٤)


a
$\bar{Z}_1 = 10\,\Omega\,\angle -53.13°$
$\bar{Z}_2 = 10\,\Omega\,\angle 36.87°$
$\bar{i}_{11}$
$\bar{i}_{21}$
b
c
$\bar{Z}_3 = 10\,\Omega\,\angle 53.13°$
$\bar{Z}_4 = 10\,\Omega\,\angle -36.87°$
d

شكل (٤- ٥)



شكل (٤- ٦)

إذن يمكن حساب المعاوقة المكافئة $\overline{Z}_{Th}$ كما يلي:

$$\overline{Z}_{Th} = \left(\frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3}\right) + \left(\frac{\overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_4}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_4}\right) =$$

$$\overline{Z}_{Th} = \left(\frac{(10\,\Omega\,\angle -53.13°)\cdot(10\,\angle 53.13°)}{(10\,\Omega\,\angle -53.13°)+(10\,\angle 53.13°)}\right) + \left(\frac{(10\,\Omega\,\angle 36.87°)\cdot(10\,\angle -36.87°)}{(10\,\Omega\,\angle 36.87°)+(10\,\angle -36.87°)}\right)$$

$$\overline{Z}_{Th} = \left(\frac{100\,\Omega^2\ \angle 0°}{(6-j8)\,\Omega+(6+j8)\,\Omega}\right) + \left(\frac{100\,\Omega^2\ \angle 0°}{(8+j6)\,\Omega+(8-j6)\,\Omega}\right)$$

$$\overline{Z}_{Th} = \left(\frac{100\,\Omega^2\ \angle 0°}{(12-j0)\,\Omega}\right) + \left(\frac{100\,\Omega^2\ \angle 0°}{(16+j0)\,\Omega}\right) = \left(\frac{100\,\Omega^2\ \angle 0°}{(12\,\Omega\,\angle 0°)}\right) + \left(\frac{100\,\Omega^2\ \angle 0°}{(16\,\Omega\,\angle 0°)}\right)$$

$$\overline{Z}_{Th} = (8.33\,\Omega\,\angle 0°)\,\Omega + (6.25\,\Omega\,\angle 0°)\,\Omega$$

$$\overline{Z}_{Th} = (8.33 + j\,0)\,\Omega + (6.25 + j\,0)\,\Omega = 14.583\,\Omega\,\angle 0°$$

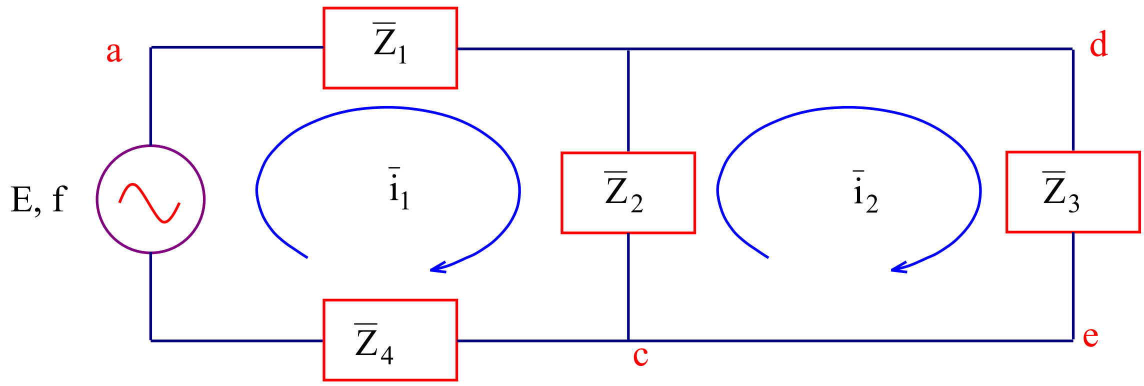
- يمكن الآن حساب قيمة التيار $\bar{i}_5$ كالآتي:

$$\bar{i}_5 = \frac{\bar{V}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + \bar{Z}_5} = \frac{229.14\ V \angle 90^\circ}{(14.583\,\Omega \angle 0^\circ) + (20\ \Omega \angle 0^\circ)} = \frac{229.14\ V \angle 90^\circ}{(14.583 + j\,0)\Omega + (20 + j\,0)\Omega}$$

$$\bar{i}_5 = \frac{229.14\ V \angle 90^\circ}{(34.583 + j\,0)\Omega} = \frac{229.14\ V \angle 90^\circ}{34.583\ \Omega \angle 0^\circ} = 6.63\ A \angle 90^\circ$$

٤- ٣ طريقة الحلقة المغلقة (طريقة ماكسويل) Closed Loop (Mesh) method

تعتمد طريقة الحلقة المغلقة على قانونا كيرشوف للتيارات وللجهود ، حيث أقترح ماكسويل هذه الطريقة بترتيب قانونا كيرشوف في نظام معادلات خطية على طريقة المصفوفات. حيث اقترح ماكسويل تياراً دواراً لكل دائرة كهربائية مغلقة ، وبتطبيق قوانين كيرشوف يمكن تنظيم المعادلات على صورة نظام مصفوفات.



شكل (٤- ٧)

من شكل (٤- ٧) يمكن اعتبار التيار الدوار $\bar{i}_1$ هو التيار الخاص بالدائرة المغلقة abc (أو الدائرة رقم 1) وكذلك يمكن اعتبار التيار $\bar{i}_2$ هو التيار الخاص بالدائرة المغلقة bdec (أو الدائرة رقم 2). ويكون بالتالي التيار المار في كل من المعاوقات $\bar{Z}_1, \bar{Z}_4$ هو التيار $\bar{i}_1$ والتيار المار في المعاوقة $\bar{Z}_3$ هو التيار $\bar{i}_2$ أما المعاوقة $\bar{Z}_2$ فيمر فيها التيار $\bar{i}_1 - \bar{i}_2$ ويمكن بالتالي كتابة قوانين كيرشوف كالتالي:

- بالنسبة للدائرة abc (أو الدائرة رقم 1):

$$\bar{E} = \bar{i}_1 \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4) + (\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \cdot \bar{Z}_2 \qquad (٤-٢)$$

$$\bar{E} = \bar{i}_1 \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 + \bar{Z}_2) - \bar{i}_2 \cdot \bar{Z}_2 \qquad (٤-٣)$$

- بالنسبة للدائرة bdec (أو الدائرة رقم 2):

$$0 = \bar{i}_2 \cdot \bar{Z}_3 - (\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \cdot \bar{Z}_2 \qquad (٤-٤)$$

$$0 = -\bar{i}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{i}_2 \cdot (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \qquad (٤-٥)$$

- ويمكن ترتيب المعادلات على صورة نظام معادلات خطية من الدرجة الأولى كالتالي:

$$\begin{bmatrix} (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 + \bar{Z}_2) & -\bar{Z}_2 \\ -\bar{Z}_2 & (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (٤-٦)$$

ويلاحظ في هذا النظام ما يلي:

١. يمكن التعبير عن هذا النظام بأنه نظام المعادلات الخطية لقانون أوم لدوائر التيار المتردد على الصورة $[\bar{E}]=[\bar{Z}][\bar{V}]$ حيث تسمى $[\bar{Z}]$ بمصفوفة المعاوقات ويسمى $[\bar{i}]$ بمتجه التيارات ويسمى $[\bar{V}]$ بمتجه الجهود.

٢. يكون متجه التيارات $[\bar{i}]$ في الغالب هو المجهول وهو يمثل التيارات الدوارة في الدائرة الكهربائية المكونة من مجموعة k من الدوائر الكهربائية المغلقة.

٣. يمكن بناء مصفوفة المعاوقات بداية من القطر حيث تكون هذه المصفوفة مربعة ومتماثلة $(k \times k)$ وتكون مكونات القطر <u>فقط</u> موجبة أما باقي المكونات فتكون سالبة. وتكون مفردات مكونات القطر وهي $\bar{Z}_{11}$ و $\bar{Z}_{22}$ ، .... حتى $\bar{Z}_{kk}$ هي مجموع معاوقات الدائرة المغلقة رقم 1 و 2 ....حتى رقم k ، ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$\bar{Z}_{11} = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 + \bar{Z}_2) \qquad (٤-٧)$$

$$\bar{Z}_{22} = (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \qquad (٤-٨)$$

حيث $k = 2$ في هذه الحالة.

أما المكونات التي هي خارج القطر فتكون سالبة وهي على الصورة العامة $\bar{Z}_{mn}$ حيث هي المعاوقة المشتركة بين الدائرة رقم m والدائرة رقم n، ويلاحظ أن $\bar{Z}_{nm} = \bar{Z}_{mn}$ حيث إن المعاوقة المشتركة بين الدائرة رقم n والدائرة رقم m هي نفسها المعاوقة المشتركة بين الدائرة رقم m والدائرة رقم n.

٤. يمكـن بنـاء متجـه الجهـود $[\overline{V}]$ بأنـه مجموعـة مـن مفـردات الجهـود $\overline{V}_x = \overline{V}_1, \overline{V}_2, ... \overline{V}_k$ حيـث يمثـل $\overline{V}_x$ مجمـوع مصـادر الجهـد في الـدائرة رقـم x، حيـث: $\overline{V}_1$ هـو مجمـوع مصـادر الجهـد في الدائرة المغلقة رقم 1، و $\overline{V}_2$ هو مجموع مصادر الجهد في الدائرة المغلقة رقم 2 و $\overline{V}_k$ هـو مجمـوع مصـادر الجهـد في الـدائرة المغلقـة رقـم k. ويكـون الاتجـاه الموجـب للجهـد $\overline{V}_x$ هـو اتجـاه سـريان التيار $\bar{i}_x$.

٥. ويكون حل هذا النظـام الخطـي للمعـادلات بـالطرق القياسـية المعروفـة في رياضيـات المصـفوفات، حيث يكون الحل العام على الصورة: $[\bar{i}] = [\overline{Z}]^{-1} [\overline{V}]$، وهنـاك العديـد مـن طـرق حـل هـذا النظـام الخطي لمعادلات الدرجة الأولى التي تعتمد في مجملها على كيفية إيجاد معكوس المصفوفة $[\overline{Z}]$ على صورة $[\overline{Z}]^{-1}$. وسوف نوجز هنا إحدى الطرق التي تعتمد علـى المحـددات في حـل هـذا النظـام. وفي هذه الطريقة يتم الآتي:

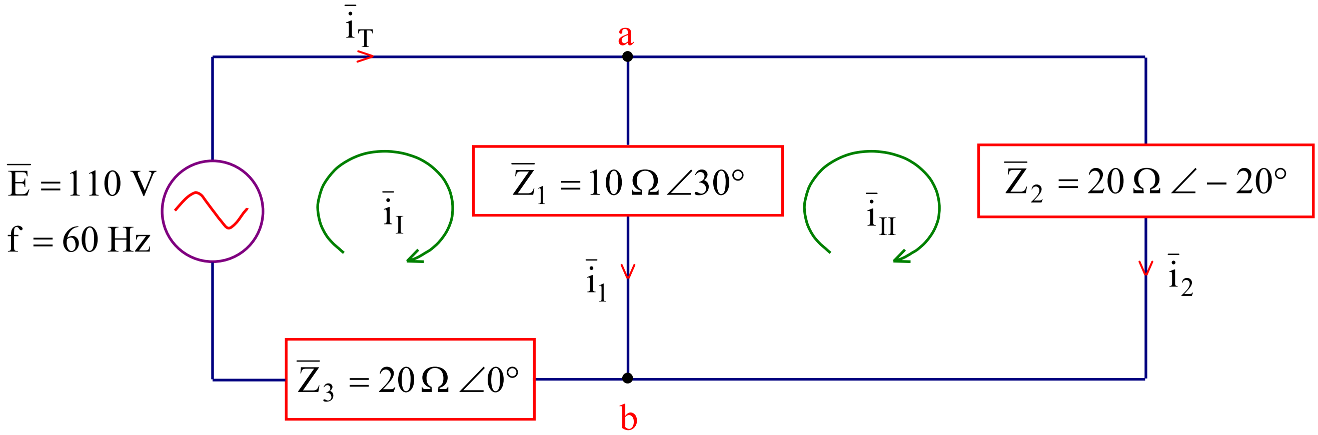
- حساب المحددة الرئيسة للمصفوفة $[\overline{Z}]$ على شكل $|\overline{Z}| = |[\overline{Z}]|$
- حسـاب المحـددة رقـم x للمصـفوفة $[\overline{Z}]$ علـى صـورة $|\overline{Z}|_x$ وذلـك بحسـاب محـددة المصـفوفة بعد استبدال العمود رقم x للمصفوفة بمتجه الجهود $[\overline{V}]$.
- حساب التيار رقم x كالتالي:

$$\bar{i}_x = \frac{|\overline{Z}|_x}{|\overline{Z}|} \qquad (٤\text{-}٩)$$

- حسـاب التيـارات الخاصـة بكـل جزء من أجزاء الـدائرة مـع الأخـذ في الاعتبـار أجـزاء الـدائرة التي يسري فيها أكثر من تيار باعتبار محصلة هذه التيارات.

مثال (٤- ٢)

في الدائرة المبينة بشكل (٤- ٨) احسب التيار في الفرع ab بطريقة الحلقة المغلقة (ماكسويل).



شكل (٤- ٨)

الحل

نلاحظ أن الدائرة الكهربائية تتكون من دائرتين كهربائيتين مغلقتين، وبالتالي نفترض وجود تيارين دوارين $\bar{i}_I$ & $\bar{i}_{II}$ كما هو مبين بشكل (٤- ٣٠). وحل الدائرة الكهربائية يعتمد بطريقة أساسية على إيجاد هذين التيارين.

خطوات الحل:

- نبدأ أولاً ببناء مصفوفة المعاوقات وهي مصفوفة مربعة (2×2) متماثلة حول قطرها كالتالي:

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) & (-\bar{Z}_1) \\ (-\bar{Z}_1) & (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \end{bmatrix}$$

ونحسب بالتالي مكونات القطر كالتالي:

$$(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) = (10\,\Omega \angle 30°) + (20\,\Omega \angle 0°) = 28.66 + j\,5 = 29.09\,\Omega \angle 9.9°$$

$$(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) = (10\,\Omega \angle 30°) + 20\,\Omega \angle -20° = 27.45 - j\,1.84 = 27.51\,\Omega \angle -3.84°$$

$$\therefore |\bar{Z}| = \begin{bmatrix} 29.09 \angle 9.9° & -10 \angle 30° \\ -10 \angle 30 & 27.51\,\Omega \angle -3.84° \end{bmatrix}$$

- ونبني بالتالي أيضاً متجه التيارات كالآتي:

$$[\bar{i}] = \begin{bmatrix} \bar{i}_I \\ \bar{i}_{II} \end{bmatrix}$$

- ونبني أيضاً متجه الجهود كالآتي:

$$[\bar{V}] = \begin{bmatrix} 110 \angle 0^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

وهكذا يمكن كتابة النظام الكامل للمعادلات الخاصة بالدائرة الكهربائية، كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 29.09 \angle 9.9^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ -10 \angle 30 & 27.51\,\Omega \angle -3.84^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_I \\ \bar{i}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \angle 0^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

ويكون الحل الرياضي لهذا النظام على الصورة الرياضية الآتية:

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_I \\ \bar{i}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.09 \angle 9.9^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ -10 \angle 30 & 27.51\,\Omega \angle -3.84^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 110 \angle 0^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

- حساب المحددة الرئيسة للمصفوفة:

$$\begin{aligned} |\bar{Z}| &= \begin{vmatrix} 29.09 \angle 9.9^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ -10 \angle 30 & 27.51\,\Omega \angle -3.84^\circ \end{vmatrix} \\ &= \left((29.09 \angle 9.9^\circ) \cdot (27.51\,\Omega \angle -3.84^\circ)\right) - \left((-10 \angle 30) \cdot (-10 \angle 30)\right) \\ &= 800.27 \angle 6.06^\circ - 100 \angle 60^\circ = 745.8 - j\,2.12 = 745.8 \angle 0.2^\circ \end{aligned}$$

- حساب المحددات الفرعية للمصفوفة:

$$\begin{aligned} |Z|_1 &= \begin{vmatrix} 110 \angle 0^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ 0 \angle 0^\circ & 27.51 \angle -3.84^\circ \end{vmatrix} = (110 \angle 0^\circ) \cdot (27.51 \angle -3.84^\circ) - 0 \angle 0^\circ \\ &= 3026.1 \angle -3.84^\circ \end{aligned}$$

$$|Z|_2 = \begin{vmatrix} 29.09 \angle 9.9^\circ & 110 \angle 0^\circ \\ -10 \angle 30^\circ & 0 \angle 0^\circ \end{vmatrix} = -(110 \angle 0^\circ) \cdot (-10 \angle 30^\circ) - 0 \angle 0^\circ = 1100 \angle 30^\circ$$

- نحسب التيارات الدوارة، كما يلي:

$$\bar{i}_I = \frac{|\bar{Z}|_1}{|\bar{Z}|} = \frac{3026.1 \angle -3.84°}{745.8 \angle 0.2°} = 4.06 \text{ A} \angle -4.04°$$

$$\bar{i}_{II} = \frac{|\bar{Z}|_2}{|\bar{Z}|} = \frac{1100 \angle 30°}{745.8 \angle 0.2°} = 1.475 \text{ A} \angle 29.8°$$

- نحسب التيار $\bar{i}_1$ كما يلي:

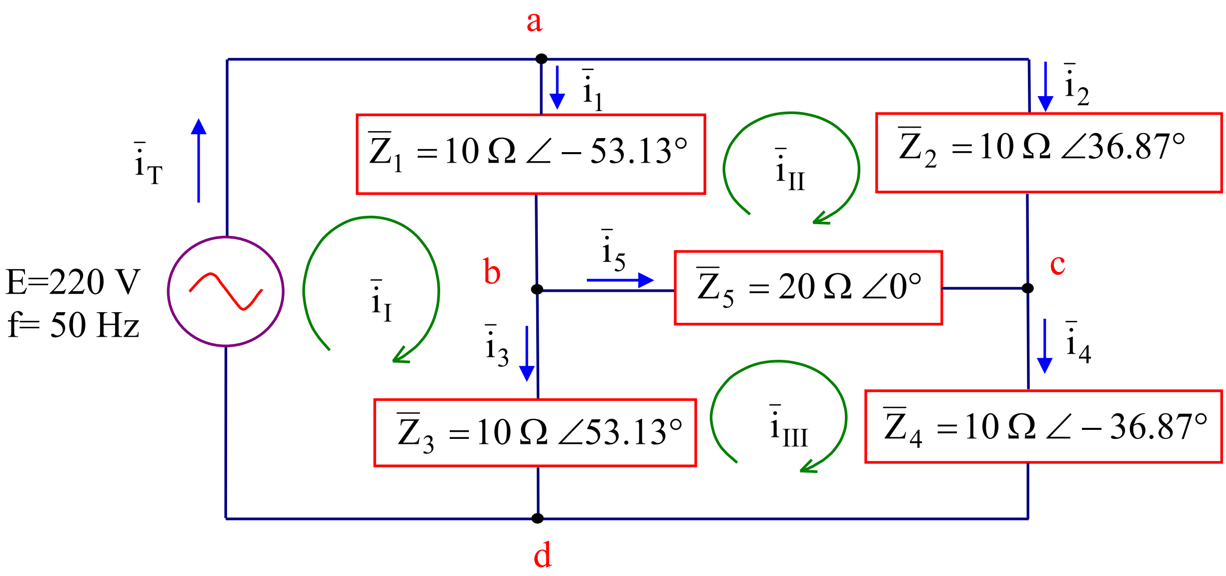
$$\bar{i}_1 = \left(\bar{i}_I - \bar{i}_{II}\right) = \left(4.06 \text{ A} \angle -4.04°\right) - \left(1.475 \text{ A} \angle 29.8°\right)$$
$$= 2.77 - j1.02 = 2.95 \text{ A} \angle -20.2°$$

مثال (٤- ٣)

في شكل (رقم- ٩) التالي احسب قيمة التيار $\bar{i}_5$ باستخدام طريقة الحلقة المغلقة (ماكسويل).

الحل

نلاحظ أن الدائرة الكهربائية تتكون من ثلاثة دوائر كهربائية مغلقة، وبالتالي نفترض وجود ثلاثة تيارات دوارة $\bar{i}_I, \bar{i}_{II}, \bar{i}_{III}$ كما هو مبين بشكل (٤- ٣١). وحل الدائرة الكهربائية يعتمد بطريقة أساسية على إيجاد هذه التيارات الثلاثة.



شكل (٤- ٩)

فيلاحظ أن:

التيار: $\bar{i}_T = \bar{i}_I$

التيار: $\bar{i}_1 = \bar{i}_I - \bar{i}_{II}$

التيار: $\bar{i}_2 = \bar{i}_{II}$

التيار: $\bar{i}_3 = \bar{i}_I - \bar{i}_{III}$

التيار: $\bar{i}_4 = \bar{i}_{III}$

التيار: $\bar{i}_5 = \bar{i}_{III} - \bar{i}_{II}$

وبالتالي تؤدي هذه الطريقة بالإضافة إلى تنظيم الحل بطريقة روتينية، إلى اختصار عدد المجاهيل.

نبدأ ببناء مصفوفة المعاوقات، وهي مصفوفة مربعة متماثلة (3×3)حيث عدد الدوائر $k = 3$، ونبدأ بمكونات القطر كالآتي:

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 = (12\,\Omega \angle 0°)$$

$$\bar{Z}_{22} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_5 = (34\,\Omega \angle -3.4°)$$

$$\bar{Z}_{33} = \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4 + \bar{Z}_5 = (10\,\Omega \angle 53.13°) + (10\,\Omega \angle -36.87°) + (20\,\Omega \angle 0°)$$

$$\bar{Z}_{33} = (34 + j2)\,\Omega = 34.06\,\Omega \angle 3.8°$$

- وبالتالي يمكن كتابة مصفوفة المعاوقات كالآتي:

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} 12 \angle 0° & -10 \angle -53.13° & -10 \angle 53.13° \\ -10 \angle -53.13° & 34.06 \angle -3.4° & -20 \angle 0° \\ -10 \angle 53.13° & -20 \angle 0° & 34.06 \angle 3.4° \end{bmatrix}$$

- ويمكن كتابة متجه التيارات كالآتي:

$$[\bar{i}] = \begin{bmatrix} \bar{i}_I \\ \bar{i}_{II} \\ \bar{i}_{III} \end{bmatrix}$$

- ويمكن كتابة متجه الجهود كالآتي:

$$[\overline{V}] = \begin{bmatrix} 220\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

- وهكذا يمكن كتابة النظام الكامل للمعادلات الخاصة بالدائرة الكهربائية، كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{I} \\ \bar{i}_{II} \\ \bar{i}_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

ويكون الحل الرياضي لهذا النظام على الصورة الرياضية الآتية:

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_{I} \\ \bar{i}_{II} \\ \bar{i}_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 220\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

وأحد الحلول لهذا النظام وهي طريقة المحددات، كالآتي:

$$\bar{i}_{I} = \left(\frac{\begin{vmatrix} 220\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ 0\angle 0^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}} \right)$$

$$\bar{i}_{II} = \left(\frac{\begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & 220\angle 0^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 0\angle 0^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & 0\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}} \right)$$

$$\bar{i}_{III} = \left(\frac{\begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & 220\angle 0^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & 0\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 0\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}} \right)$$

- ونبدأ بحساب المحددات، كالآتي:

i. المحددة الرئيسة للمصفوفة:

$$|\bar{Z}| = \begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\bar{Z}| &= (12\angle 0^\circ)\left((34.06\angle -3.4^\circ)(34.06\angle 3.4^\circ) - (-20\angle 0^\circ)(-20\angle 0^\circ)\right) \\ &+ (10\angle -53.13^\circ)\left((-10\angle -53.13^\circ)(34.06\angle 3.4^\circ) - (10\angle 53.13^\circ)(20\angle 0^\circ)\right) \\ &+ (-10\angle 53.13^\circ)\left((10\angle -53.13^\circ)(20\angle 0^\circ) + (10\angle 53.13^\circ)(34.06\angle -3.4^\circ)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\overline{Z}\right| &= (12\angle 0^\circ)\left((1160\angle 0^\circ)-(400\angle 0^\circ)\right)\\
&\quad + (10\angle -53.13^\circ)\left((-340.6\angle -49.73^\circ)-(200\angle 53.13^\circ)\right)\\
&\quad - (10\angle 53.13^\circ)\left((200\angle -53.13^\circ)+(340.6\angle 49.73^\circ)\right)\\
&= (12\angle 0^\circ)(760+j\,0)+(10\angle -53.13^\circ)(-340.16+j\,99.88)\\
&\quad - (10\angle 53.13^\circ)(340.16+j99.88)\\
&= (12\angle 0^\circ)(760\angle 0^\circ)+(10\angle -53.13^\circ)(354.52\angle 163.63^\circ)\\
&\quad - (10\angle 53.13^\circ)(354.5\angle 16.4^\circ)\\
&= (9120\angle 0^\circ)+(3545.2\angle 110.5^\circ)-(3545\angle 69.53^\circ)=6638.7-j\,0.5\\
&= 6638.7\angle 0^\circ
\end{aligned}$$

ii. المحددة الأولى للمصفوفة:

$$\left|\overline{Z}\right|_1 = \begin{vmatrix} 220\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ 0\angle 0^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & -20\angle 0^\circ \\ 0\angle 0^\circ & -20\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}$$

وواضح أنه من الأيسر أن نفك المحددة من العمود الأول كالتالي:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{Z}\right|_1 &= (220\angle 0^\circ)\left((34.06\angle -3.4^\circ)(34.06\angle 3.4^\circ)-(-20\angle 0^\circ)(-20\angle 0^\circ)\right)\\
&= (220\angle 0^\circ)\left((1160\angle 0^\circ)-(400\angle 0^\circ)\right)=(220\angle 0^\circ)(760+j\,0)\\
&= (220\angle 0^\circ)(760\angle 0^\circ)=167200\angle 0^\circ
\end{aligned}$$

iii. المحددة الثانية للمصفوفة:

$$\left|\overline{Z}\right|_2 = \begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & 220\angle 0^\circ & -10\angle 53.13^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 0\angle 0^\circ & -20\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & 0\angle 0^\circ & 34.06\angle 3.4^\circ \end{vmatrix}$$

وواضح أنه من الأيسر أن نفك المحددة من العمود الثاني كالتالي:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{Z}\right|_2 &= (-220\angle 0^\circ)\left((-10\angle -53.13^\circ)(34.06\angle 3.4^\circ) - (-10\angle 53.13^\circ)(-20\angle 0^\circ)\right)\\
&= (-220\angle 0^\circ)\left((-340.6\angle -49.73^\circ) - (200\angle 53.13^\circ)\right)\\
&= (-220\angle 0^\circ)(-340.16 + j\,99.88) = (-220\angle 0^\circ)(340.16 - j\,99.88)\\
&= (-220\angle 0^\circ)(354.52\angle 163.64^\circ) = -77994.53\angle 163.64^\circ = 77994.53\angle -163.64^\circ
\end{aligned}$$

iv. المحددة الثانية للمصفوفة:

$$\left|\overline{Z}\right|_3 = \begin{vmatrix} 12\angle 0^\circ & -10\angle -53.13^\circ & 220\angle 0^\circ \\ -10\angle -53.13^\circ & 34.06\angle -3.4^\circ & 0\angle 0^\circ \\ -10\angle 53.13^\circ & -20\angle 0^\circ & 0\angle 0^\circ \end{vmatrix}$$

وواضح أنه من الأيسر أن نفك المحددة من العمود الثالث كالتالي:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{Z}\right|_3 &= (220\angle 0^\circ)\left((-10\angle -53.13^\circ)(-20\angle 0^\circ) - (-10\angle 53.13^\circ)(34.06\angle -3.4^\circ)\right)\\
&= (220\angle 0^\circ)\left((200\angle -53.13^\circ) + (340.6\angle 49.73^\circ)\right) = (220\angle 0^\circ)(340.16 + j\,99.88)\\
&= (220\angle 0^\circ)(354.5\angle 16.36^\circ) = 77994.55\angle 16.36^\circ
\end{aligned}$$

- ثم نحسب التيارات كالتالي:

$$\bar{i}_I = \frac{|Z|_1}{|Z|} = \frac{167200\angle 0^\circ}{6638.7\angle 0^\circ} = 25.16\text{ A}\angle 0^\circ$$

$$\bar{i}_{II} = \frac{|Z|_2}{|Z|} = \frac{77994.53\angle -163.64^\circ}{6638.7\angle 0^\circ} = 11.75\text{ A}\angle -163.64^\circ$$

$$\bar{i}_{III} = \frac{|Z|_3}{|Z|} = \frac{77994.55\angle 16.4^\circ}{6638.7\angle 0^\circ} = 11.75\text{ A}\angle 16.4^\circ$$

• ثم نحسب التيارات المطلوبة:

$$\bar{i}_T = \bar{i}_I = 25.16\ A\ \angle 0$$

$$\bar{i}_1 = \bar{i}_I - \bar{i}_{II} = (25.16\ \angle 0°) - (11.75\ \angle -163.64°) = 13.89 + j\,3.31 = 14.3\ A\ \angle 13.4°$$

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_{II} = 11.75\ A\ \angle -163.64°$$

$$\bar{i}_3 = \bar{i}_I - \bar{i}_{III} = 25.16\ A\ \angle 0° - 11.75\ A\ \angle 16.4° = 13.89 - j\,3.32 = 14.3\ A\ \angle -13.4°$$

$$\bar{i}_4 = \bar{i}_{III} = 11.75\ A\ \angle 16.4°$$

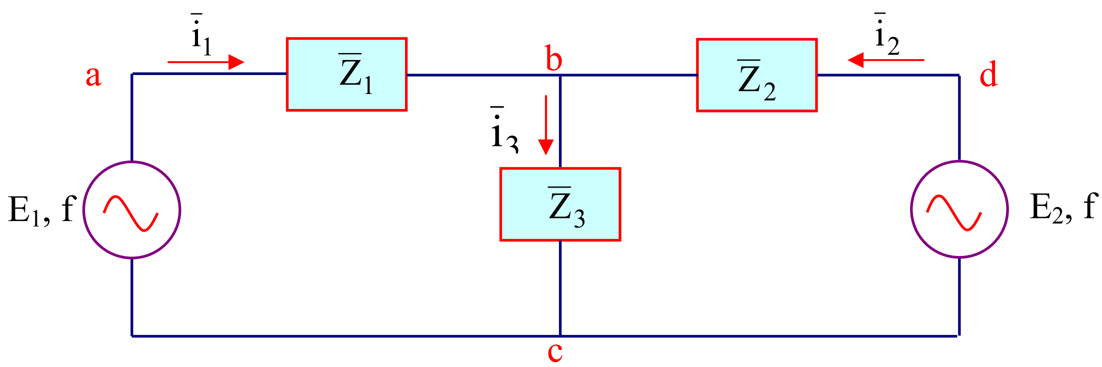
$$\bar{i}_5 = \bar{i}_{III} - \bar{i}_{II} = 11.75\ A\ \angle 16.4° - (11.75\ A\ \angle -163.64°)$$

$$\bar{i}_5 = 11.75\ A\ \angle 16.4° + 11.75\ A\ \angle 163.64° = 0 + j\,6.63 = 6.63\ A\ \angle 90°$$

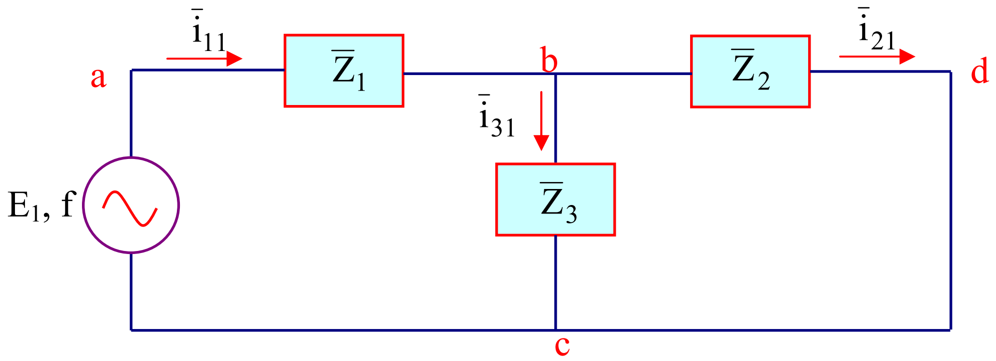
٤-٤ نظرية التركيب Superposition Theorem

كما درسنا في منهاج هندسة كهربائية – ١ ، تعتمد نظرية التركيب أو التجميع على الحقيقة العلمية التي تنص على أن التأثير الكهربائي في أي فرع من أفرع الدائرة الكهربائية التي تحتوي على أكثر من مصدر هو مجموع تأثيرات كل مصدر على حدة في هذا الفرع.

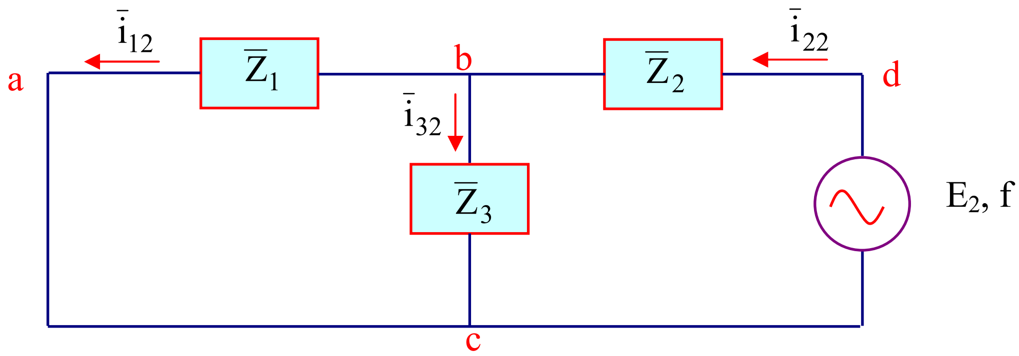
كمثال على ذلك، الدائرة الكهربائية في شكل (٤- ١٠) التي تحتوي على مصدري الجهد $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ معاً، فإن التيارات $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ هي محصلة للتأثيرات الفردية لكل من $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ على حدة كما هو مبين بالشكلين (٤- ١١) و (٤- ١٢).



شكل (٤- ١٠) محصلة تأثيرات المصدرين $\bar{E}_1, \bar{E}_2$



شكل (٤- ١١) تأثير المصدر $\bar{E}_1$ فقط



شكل (٤- ١٢) تأثير المصدر $\bar{E}_2$ فقط

وعلى ذلك يكون:

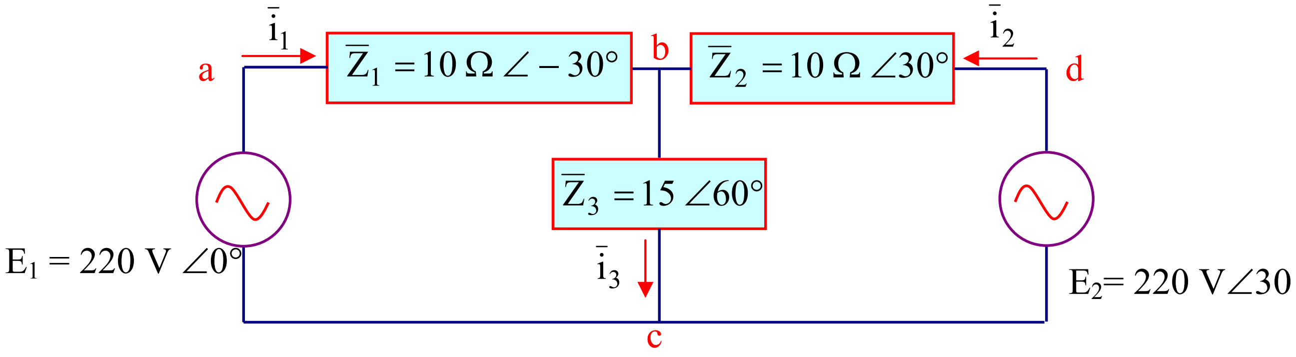
$$\bar{i}_1 = \bar{i}_{11} - \bar{i}_{12} \quad (١٠-٤)$$

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_{22} - \bar{i}_{21} \quad (١١-٤)$$

$$\bar{i}_3 = \bar{i}_{31} + \bar{i}_{32} \quad (١٢-٤)$$

مثال (٤- ٤)

باستخدام نظرية التركيب، احسب تيارات الدائرة الكهربائية المبينة في شكل (٤- ١٣).

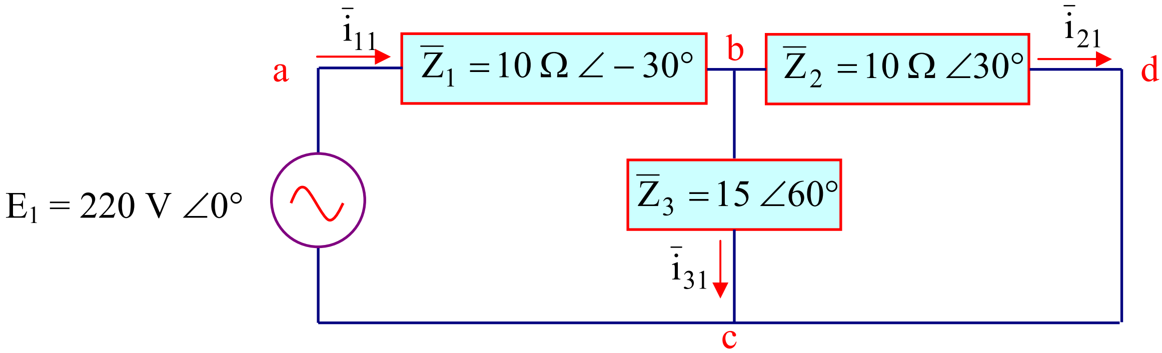


شكل (٤- ١٣)

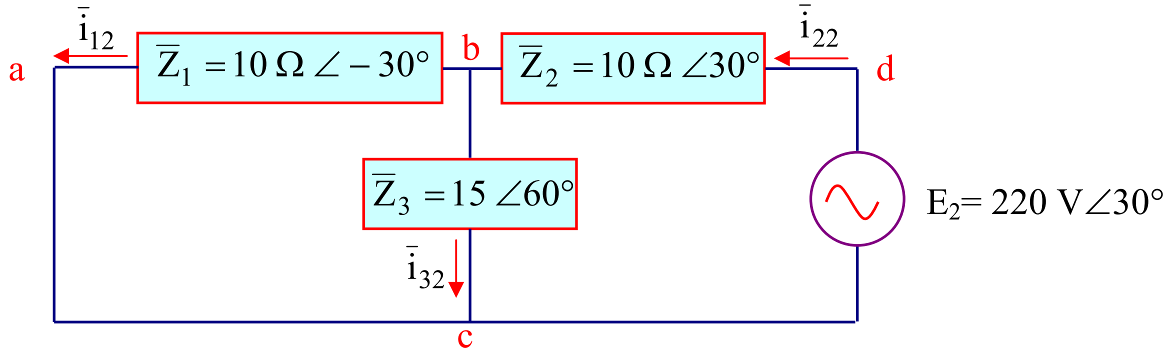
الحل

يمكن اعتبار الدائرة الكهربائية في شكل (٤- ١٣) هي محصلة الدائرتين الموضحتين في الشكلين رقم (٤- ١٤) و (٤- ١٥)، أي محصلة أو مجموع تأثير كل مصدر على حدة في الدائرة الكهربائية، وعلى ذلك يمكن حساب التيارات كالآتي:

$$\bar{i}_{11} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1 + \dfrac{\bar{Z}_2\,\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}} = \frac{\bar{E}_1 \cdot (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)}{(\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3)}$$



شكل (٤- ١٤) تأثير E_1 فقط



شكل (٤-١٥) تأثير E_2 فقط

$$\bar{i}_{11} = \frac{220\text{ V}\,\angle 0° \cdot (10\,\Omega\,\angle 30° + 15\,\Omega\angle 60°)}{(10\,\Omega\,\angle -30° \cdot 10\,\Omega\,\angle 30° + 10\,\Omega\,\angle -30° \cdot 15\,\Omega\,\angle 60° + 10\,\Omega\,\angle 30° \cdot 15\,\Omega\,\angle 60°)}$$

$$\bar{i}_{11} = \frac{220\text{ V}\,\angle 0° \cdot (23.15 + j18)\,\Omega}{(100\,\Omega^2\,\angle 0° + 150\,\Omega^2\,\angle 30° + 150\,\Omega^2\,\angle 90°)} = \frac{220\text{ V}\,\angle 0° \cdot 29.32\,\Omega\,\angle 37.85°}{230 + j225}$$

$$\bar{i}_{11} = \frac{220\text{ V}\,\angle 0° \cdot 29.32\,\Omega\,\angle 37.85°}{321.75\,\Omega^2\angle 44.4°} = 20.05\text{ A}\,\angle -6.55°$$

ثم من قانون تقسيم التيارات:

$$\bar{i}_{21} = \bar{i}_{11}\,\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = (20.05\text{ A}\,\angle -6.55°)\cdot\frac{10\,\Omega\,\angle 30°}{29.32\,\Omega\,\angle 37.85°} = 8.84\text{ A}\,\angle -14.4°$$

$$\bar{i}_{31} = \bar{i}_{11}\,\frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = (20.05\text{ A}\,\angle -6.55°)\cdot\frac{15\,\Omega\,\angle 60°}{29.32\,\Omega\,\angle 37.85°} = 10.26\text{ A}\,\angle -15.6°$$

$$\bar{i}_{22} = \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2 + \dfrac{\bar{Z}_1\,\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3}} = \frac{\bar{E}_2 \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3)}{(\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3)}$$

$$\bar{i}_{22} = \frac{220\ \text{V}\ \angle 30° \cdot (10\ \Omega\ \angle -30° + 15\ \Omega \angle 60°)}{321.75\ \Omega^2 \angle 44.4°} = \frac{220\ \text{V}\ \angle 30° \cdot (16.16 + j\,8)}{321.75\ \Omega^2 \angle 44.4°}$$

$$\bar{i}_{22} = \frac{(220\ \text{V}\ \angle 30°)\cdot(18.03\ \Omega\ \angle 26.31°)}{321.75\ \Omega^2 \angle 44.4°} = 12.33\ \text{A}\ \angle 12°$$

$$\bar{i}_{12} = \bar{i}_{22}\,\frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3} = \cdot \frac{(12.33\ \text{A}\ \angle 12°)\cdot(15\ \Omega\ \angle 60°)}{18.03\ \Omega\ \angle 26.31°} = 10.25\ \text{A}\ \angle 45.6°$$

$$\bar{i}_{32} = \bar{i}_{22}\,\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3} = \cdot \frac{(12.33\ \text{A}\ \angle 12°)\cdot(10\ \Omega\ \angle -30°)}{18.03\ \Omega\ \angle 26.31°} = 6.84\ \text{A}\ \angle -44.4°$$

ثم تجمع التيارات:

$$\bar{i}_1 = \bar{i}_{11} - \bar{i}_{12} = (20.05\ \text{A}\ \angle -6.55°) - (10.25\ \text{A}\ \angle 45.6°) = 12.75 - j\,9.6$$

$$\bar{i}_1 = 15.97\ \text{A}\ \angle -37°$$

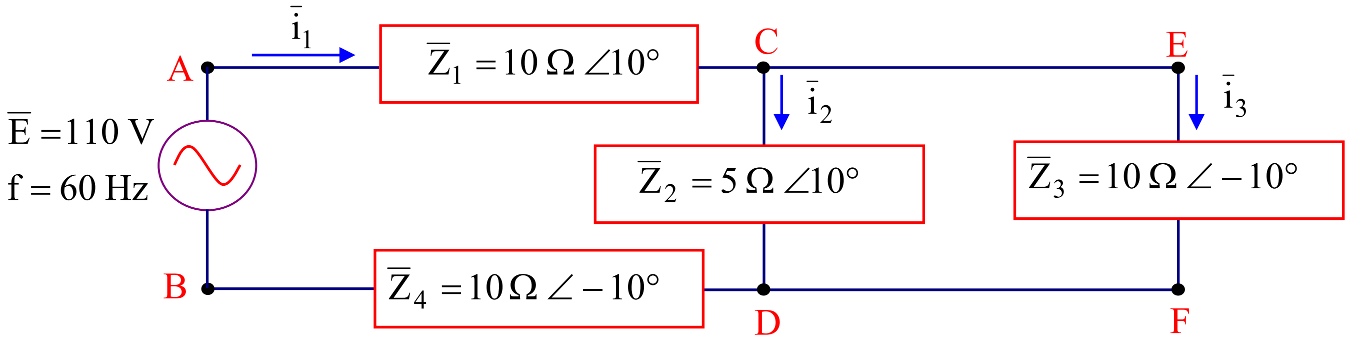
$$\bar{i}_2 = \bar{i}_{22} - \bar{i}_{21} = (12.33\ \text{A}\ \angle 12°) - (8.84\ \text{A}\ \angle -14.4°) = 2.18 - j\,0.217$$

$$\bar{i}_2 = 2.2\ \text{A}\ \angle -5.7°$$

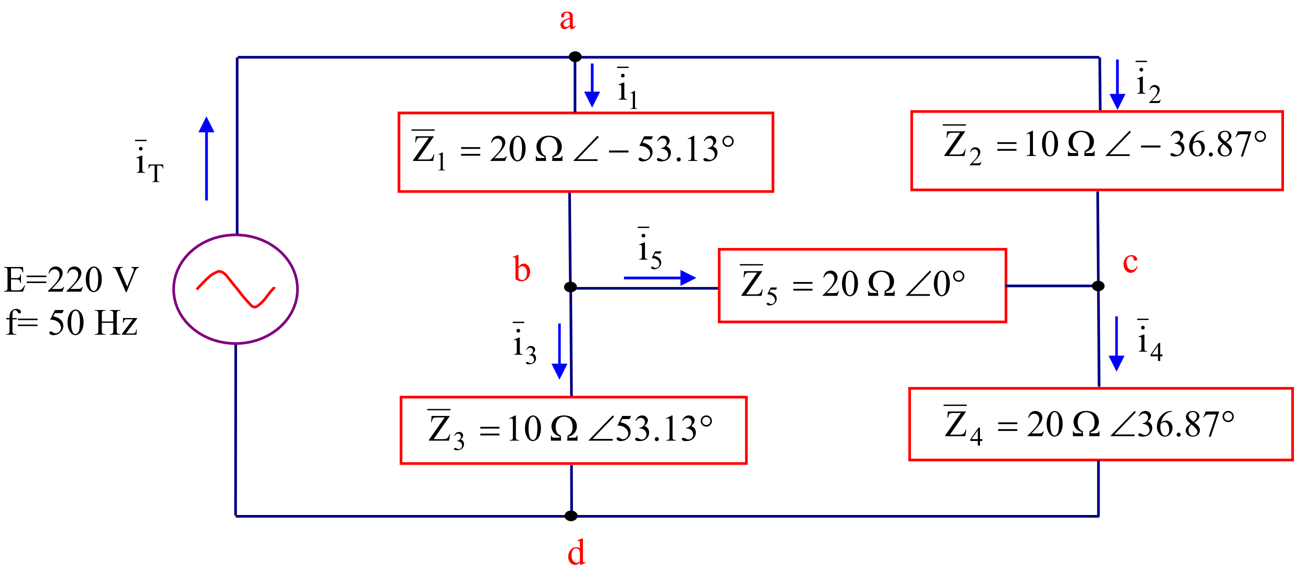
$$\bar{i}_3 = \bar{i}_{31} + \bar{i}_{32} = (10.26\ \text{A}\ \angle -15.6°) + (6.84\ \text{A}\ \angle -44.4°) = 14.77 - j\,2.03$$

تدريبات على الوحدة الرابعة

١- في الشكل التالي احسب التيار $\bar{i}_2$ باستخدام نظرية ثفنن.

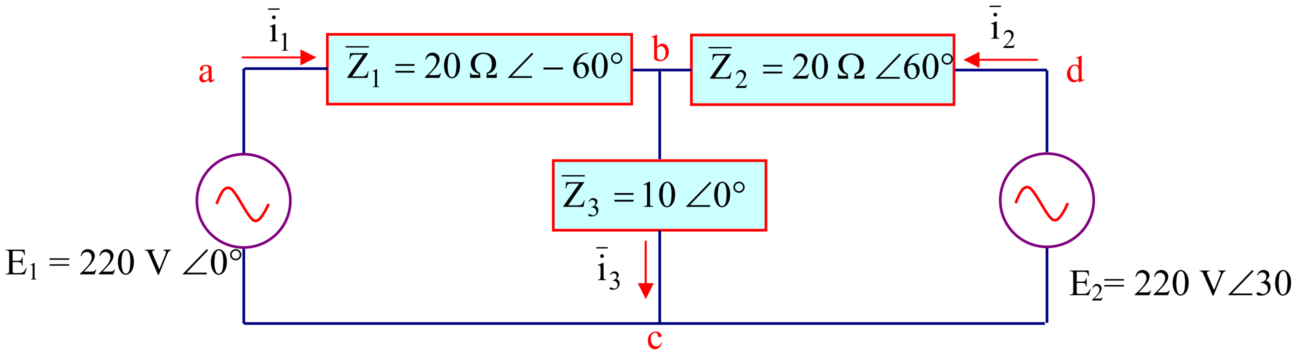


٢ للدائرة الكهربائية المبينة ، احسب التيار i_5 المار في الحمل Z_5 باستخدام نظرية ثفنن



٣. في السؤال رقم (٢)، احسب التيار $\bar{i}_5$ ، باستخدام نظرية الحلقة المغلقة.

٤. باستخدام نظرية التركيب، احسب تيارات الدائرة الكهربائية المبينة في الشكل التالي :



هندسة كهربائية- ٢

اساسيات الدوائر ثلاثية الأوجه

اساسيات الدوائر الثلاثية الأوجه

٥

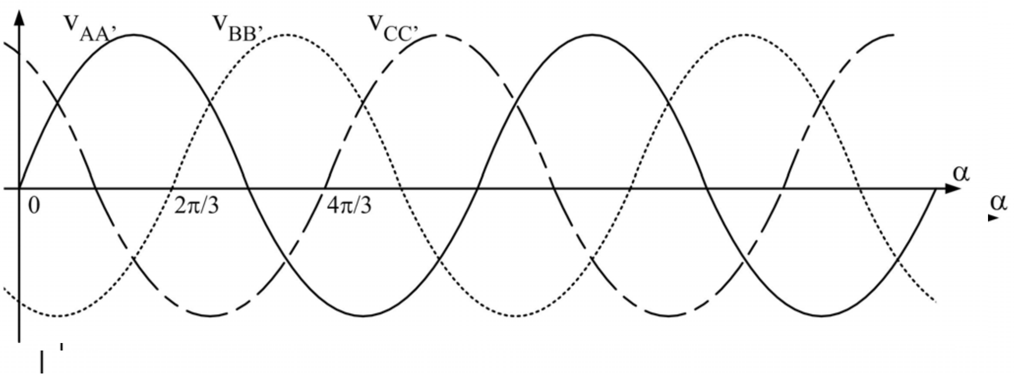
الأهداف العامة للوحدة الخامسة

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة، يكون المتدرب قادراً على معرفة:

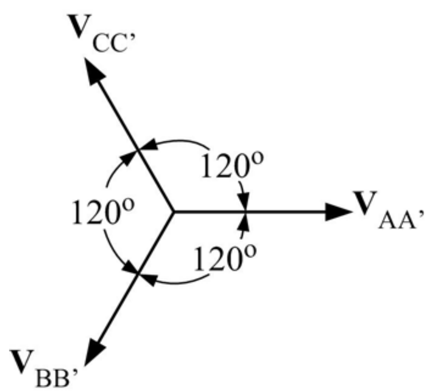
- أنواع توصيل المنابع ثلاثة الأوجه
- تتابع الجهود الثلاثية وعلاقة الجهود والتيارات للأوجه الثلاثية
- توصيل Y-Y المتزنة وتعيين قيمة جهود والتيارات للخطوط والأوجه
- توصيل Δ-Y- المتزنة وتعيين قيمة جهود والتيارات للخطوط والأوجه
- توصيل Δ - Δ - المتزنة وتعيين قيمة جهود والتيارات للخطوط والأوجه
- القدرة الكهربية في دوائر التيار المتردد ثلاثي الأوجة

٥- ١ مقدمة Introduction

إن معظم نظم القدرة الكهربية ذات ثلاثة أوجه، أي أنها تحتوي على ثلاثة منابع للجهد لكل منها نفس السعة والتردد، ولكنها مرحلة عن بعضها بزاوية مقدارها $120°$ (في الزمن) ويوضح شكل (٥- ١) نظام ثلاثي الأوجة .



شكل (٥- ١) موجات جهود نظام ثلاثي الاوجة



شِكل (٥- ٢) زاوية الطور لنظام ثلاثي الاوجة

$V_a = V_m \sin \omega t$, $Va = V\angle 0$ (٥- ١)

$V_b = V_m \sin(\omega t - 120)$, $Vb = V\angle\text{-}120$ (٥- ٢)

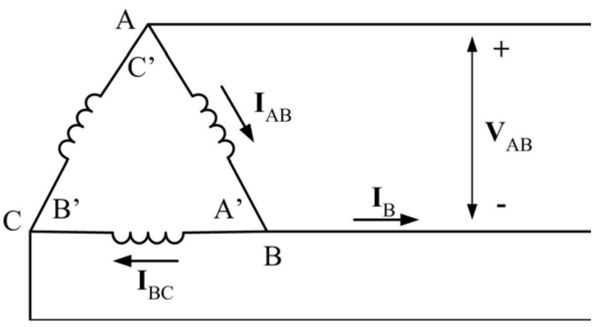
$V_C = V_m \sin(\omega t - 240) = V_m \sin(\omega t + 120)$, $Vc = V\angle 120$ (٥- ٣)

حيث سبق تعريف علاقة القيمة الفعالة بالقيمة العظمى أو القصوى سواء بالنسبة للجهد أو التيار

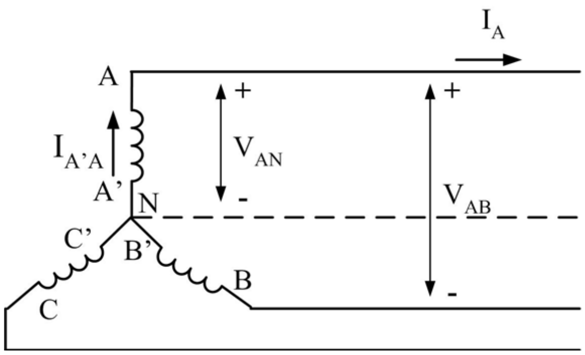
$$V_{rms} = V_m / \sqrt{2} \qquad (٥- ٤)$$

٥- ٢ أنواع توصيل المنابع ثلاثية الاوجه

توصل المنابع الثلاثة للجهد فيما بينها إما على شكل نجمة أو دلتا كما توضحها الأشكال (٥- ٣ ، ٥- ٤)



شكل (٥- ٣) توصيل دلتا



شكل(٥- ٤) توصيل نجمة

تبين الأشكال(٥- ٣)، (٥- ٤) نظام ثلاثي الأوجه موصل على شكل دلتا/ نجمة ، كما أن. من الواضح أنه بالنسبة لتوصيلة النجمة ، فإن قيم التيار للوجه هي قيمة تيار الخط ، فإذا رمزنا لقيم الوجه بالرمز p ولقيم الخط بالرمز L فإنه بالرجوع إلى شكل (٥- ٤) نحصل علي:

في حالة النجمة:

$$V_L = \sqrt{3}\ V_p \qquad (٥- ٥)$$

في حالة الدلتا:

$$V_L = V_p \qquad I_L = \sqrt{3}\ I_p \qquad (٥- ٦)$$

تعريف جهد الخط: يعرف على أنه قياس الجهد من خط نقل إلى خط نقل، ونجد في حالة الشكل دلتا أن جهد الخط يساوي جهد الوجه أي:

(٥- ٧) $V_L = V_p$

بينما نجد في حالة الشكل نجمة أن

(٥- ٨) $I_L = I_p$

من المعادلات السابقة يتضح أن قيمة التيار والجهد تعتمد على طريقة التوصيل سواء دلتا أم نجمة وذلك حسب المنظومة المستخدمة ٠

٥- ٣ تتابع الجهود الثلاثية وعلاقة الجهود والتيارات للأوجه الثلاثية

طبقا للأنظمة ثلاثية الاوجة تتكون من ثلاثة مصادر للجهد موصلة على أحمال.وتكون موصلة عل شكل Y أو دلتا كما في شكل(٥- ٣) و(٥- ٤)
وسوف نتعرض فقط إلي الجهود المتزنة في الأنظمة ثلاثية الاوجة أي أنه نفس القيمة والتردد لكل وجه والزاوية بين كل وجه ١٢٠ درجة سواءكان مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة كما في شكل (٥- ٢) وكذلك (٥- ١و٥- ٢و٥- ٣).
وسوف ندرس معاوقة الاوجة في حالة الأحمال المتزنة فقط كما يلي :

للأحمال المتزنة على شكل نجمة (Y)

(٥- ٩)
$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y$$

الأحمال المتزنة على شكل دلتا

(٥- ١٠) $Z_a = Z_b = Z_c = Z_\Delta$

حيث Z_Y معاوقة الحمل لكل وجه في التوصيل Y - Z_Δ معاوقة الحمل لكل وجه في التوصيل دلتا

(٥- ١١) $Z_\Delta = 3Z_Y$

(٥- ١٢) $Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta$

ويمكن تحويل توصيل الأحمال على شكل نجمة Y إلى Δ والعكس .وهناك اربع صور للتحويلات

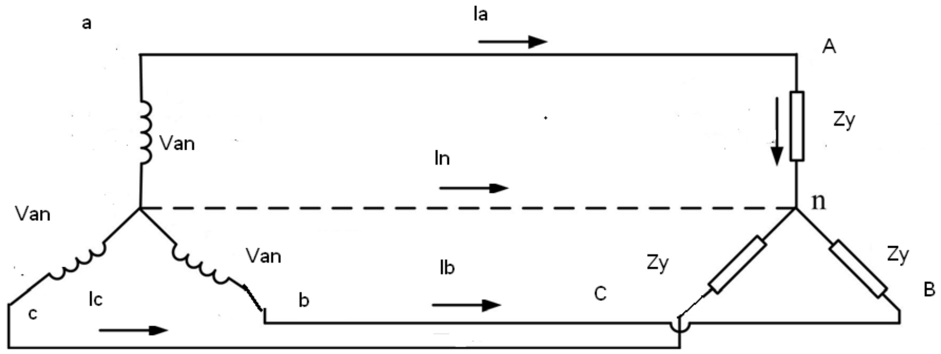
(أ) توصيل Y-Y

(ب) توصيل Y - Δ

(ج) توصيل Δ – Δ

(د) توصيل Δ - Y

توصيل نجمة - نجمة (Y-Y) المتزنة



شكل(٥- ٥) توصيل مصدر الجهد مع الأحمال المتزنة عل صورة Y-Y

في حالة الأنظمة ثلاثيه الاوجة المتزنة في الجهد والمتزنة في المعاوقة والموصلة على شكل نجمة- نجمة يكون كل فرع من أفرع المعاوقة المتصلة على شكل نجمة متساوية القيمة

٥- ٣- ١ تعيين قيمة جهود الخطوط والأوجه الثلاثية في حالة توصيل (Y-Y)

$V_{an}=V_p\angle 0$ (٥- ١٣)

$V_{bn}=V_p\angle -120$ (٥- ١٤)

$V_{cn}=V_p\angle +120$ (٥- ١٥)

$V_{ab} =V_{an}+V_{nb}=V_{an} -V_{bn} =V_p\angle 0 -V_p\angle +120$ (٥- ١٦)

$= \sqrt{3}V_p\angle 30$ (٥- ١٧)

$V_{bc}=V_{bn} -V_{cn} = \sqrt{3} V_p\angle -90$ (٥- ١٨)

$V_{ca} = V_{cn} -V_{an} = \sqrt{3} V_p\angle -210$ (٥- ١٩)

$V_L = \sqrt{3} V_p$ (٥- ٢٠)

٥- ٣- ٢ تعيين قيمه التيارات في حالة التوصيل (Y-Y)

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_Y}$$

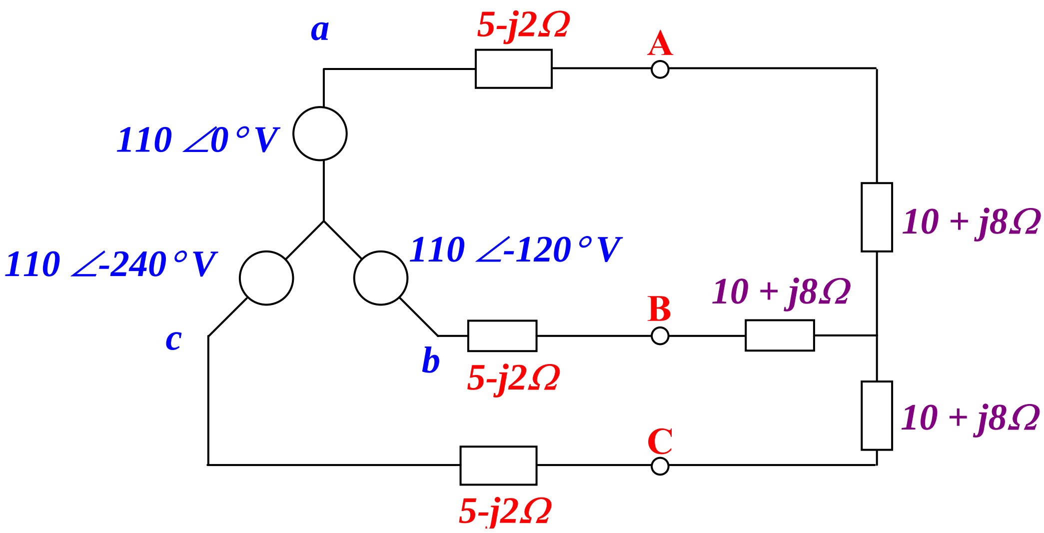
$$I_b = \frac{V_{bn}}{Z_Y} = \frac{V_{an}\angle -120}{Z_Y} = I_a \angle -120$$

$$I_c = \frac{I_{cn}}{Z_Y} = \frac{V_{an}\angle -240}{Z_Y} = I_a \angle -240$$

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

مثال ٥- ١

احسب قيمه التيارات في الدائرة ثلاثية الاوجة الموصلة عل شكل Y - Y كما موضح بالرسم شكل (٥- ٦).



شكل (٥- ٦)

الحل

الدائرة ثلاثية الاوجه متزنة ويمكن إيجاد قيمة التيار

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_Y}$$

$$Z_Y = (5 - J2) + (10 + J8) = 15 + J6 = 16.155\angle 21.8$$

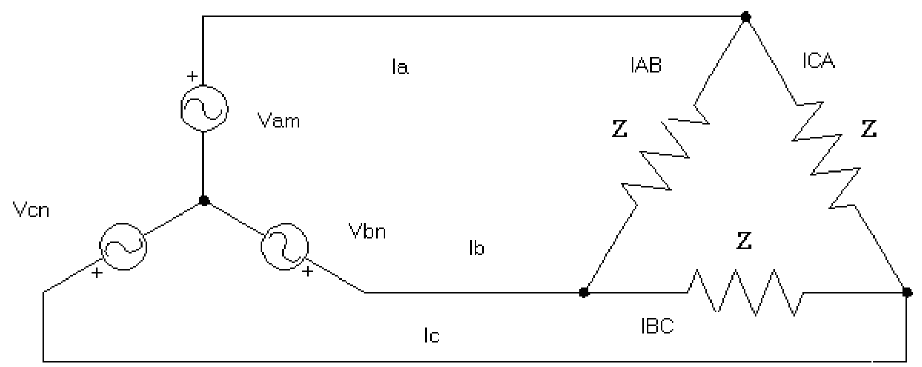
يلاحظ أن اتجاه كل من التيار والجهد في الاتجاه الموجب:

$$I_a = \frac{110\angle 0}{16.155\angle 21.8} = 6.81\angle -21.8$$

$$I_b = I_a\angle -120 = 6.81\angle -141.8$$

$$I_c = I_a\angle -240 = 6.81\angle -261.8 = 6.81\angle 98.2$$

توصيل نجمة- دلتا (Y - Δ)



شكل (٥- ٧) توصيل مصدر الجهد والأحمال (Y - Δ)

التوصيل Y- Δ يوصل مصدر الجهد على صورة نجمة وتوصل الأحمال المتزنة على صورة دلتا كما هو موضح بالرسم شكل (٥- ٧).

٥- ٣- ٣ تعيين قيمة جهد الخطوط والاوجه الثلاثية في حالة (Y- Δ)

أما جهود الاوجة الثلاثة في حالة الاتزان فهي كالتالي

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_p\angle 0 \\ V_{bn} &= V_p\angle -120 \\ V_{cn} &= V_p\angle +120 \end{aligned} \qquad (٥- ٢١)$$

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \sqrt{3}V_p\angle 30 = V_{AB} \\ V_{bc} &= \sqrt{3}V_p\angle -90 = V_{bc} \\ V_{ca} &= \sqrt{3}V_p\angle -210 = V_{CA} \end{aligned} \qquad (٥- ٢٢)$$

ومن هذا يتضح أن جهد الخط يساوي الجهد بين المعاوقة لهذه المنظومة ومن هذه الجهود يمكن استنتاج التيار المار في كل وجه

٥- ٣- ٤ تعيين قيمة التيارات في حالة توصيل (Y- Δ)

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} \\ I_{BC} &= \frac{V_{BC}}{Z_\Delta} \\ I_{CA} &= \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} \end{aligned} \qquad (٥- ٢٣)$$

بتطبيق قانون كيرشوف للجهود في شكل (٥- ٧)

$$-V_{an} + Z_\Delta I_{AB} + V_{bn} = 0 \qquad (٥- ٢٤)$$

$$I_{AB} = \frac{V_{an} - V_{bn}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} \qquad (٥- ٢٥)$$

تيار الخط يمكن استنتاجه بتطبيق قانون كيرشوف للتيارات

$$I_a = I_{AB} - I_{CA}, I_b = I_{BC} - I_{AB}, I_c = I_{CA} - I_{Bc}$$
$$I_{CA} = I_{AB}\angle -240 \qquad (٥- ٢٦)$$
$$I_a = I_{AB} - I_{CA} = I_{AB}\sqrt{3}\angle -30$$

من المعادلات السابقة يلاحظ الزيادة في قيمة تيار الخط عن قيمة تيار الوجه كما هو موضح في المعادلة التالية:

$$I_L = \sqrt{3}I_p \qquad (٥- ٢٧)$$

مثال ٥- ٢

احسب قيمة التيارات الخطوط والاوجة في الدائرة ثلاثية الاوجة المتزنة الموصلة عل شكل نجمة – دلتا كما موضح بالرسم شكل (٥- ٧) علما بأن

$$V_{an} = 100\angle 10°\ V$$
$$Z = (8 + j4)\,\Omega$$

الحل

$$Z_\Delta = 8 + j4 = 8.944\angle 26.57$$
$$V_{an} = 100\angle 10$$
$$V_{ab} = Van\sqrt{3}\angle 30 = 100\sqrt{3}\angle 10 + 30$$
$$V_{AB} = 173.2\angle 40$$

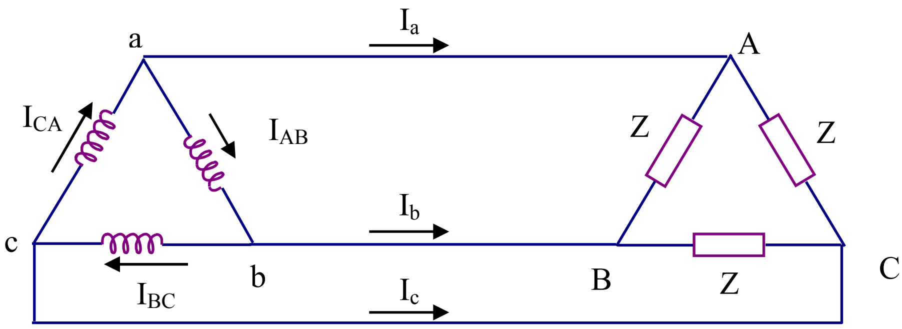
التيار لكل وجه

$$I_{AB}\frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{173.2\angle 40}{8.944\angle 26.57} = 19.36\angle 13.43$$
$$I_{BC} = I_{AB}\angle -120 = 19.36\angle -106.57$$
$$I_{CA} = I_{AB}\angle +120 = 19.36\angle 133.43$$

التيار لكل خط

$$I_a = I_{AB}\sqrt{3}\angle -30 = \sqrt{3}(19.36)\angle 13.43 - 30A$$
$$= 33.53\angle -16.57A$$
$$I_b = Ia\angle -120 = 33.53\angle -136.57A$$
$$I_c = i_a\angle 120 = 33.53\angle 103.43A$$

توصيل دلتا- دلتا ($\Delta - \Delta$)



شكل (٥- ٨) توصيل مصدر الجهد والأحمال ($\Delta-\Delta$)

شكل (٥- ٨) يبين توصيل دلتا – دلتا لكل من مصدر الجهد المتزن والأحمال المتزنة كل منهما على صورة دلتا .

٥- ٣- ٥ تعيين قيمة جهد الخطوط والأوجه الثلاثية في حالة (Δ -Δ)

الجهد لكل وجه من أوجه مصدر الجهد المتزن الموصل في صورة دلتا كما يلي:

$$V_{ab} = V_p\angle 0$$
$$V_{bc} = V_p\angle -120 \qquad (٥- ٢٨)$$
$$V_{ca} = V_p\angle 120$$

جهد الخط يساوي جهد الوجه في حالة التوصيل دلتا –دلتا وبفرض أنه لاتوجد معاوقة على خط الجهد فإن جهد الوجه لمصدر الجهد الموصل على صورة دلتا يساوي الجهد بين طرفي المعاوقة للحمل .

$$V_{ab} = V_{AB},$$
$$V_{bc} = V_{bc} \qquad (٥- ٢٩)$$
$$V_{ca} = V_{CA}$$

٥- ٣- ٦ تعيين قيمة التيارات في حالة توصيل (Δ - Δ)

تيار الوجه :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta}$$
$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta} \qquad (٥- ٣٠)$$
$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ca}}{Z_\Delta}$$

بتطبيق قانون كيرشوف للتيارات يمكن تعيين تيار الخط كما يلي

$$I_a = I_{AB} - I_{CA}$$
$$I_b = I_{bc} - I_{AB} \qquad (٥- ٣١)$$
$$I_c = I_{CA} - I_{BC}$$

مثال ٥- ٣

إذا كانت قيمة الأحمال المتزنة الموصلة في صورة دلتا 20-j5 اوم موصلة مع مولد موصل في صورة دلتا(0 ∠ Vab=330) . احسب تيار الوجه للدائرة على الأحمال .

الحل

حمل المعاوقة لكل وجه

$$Z_\Delta = 20 - j15 = 25\angle -36.87\Omega$$

تيار الوجه

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{330\angle 0}{25\angle -36.87} = 13.2\angle 36.87A$$

$$I_{BC} = I_{AB}\angle -120 = 13.2\angle -83.12A$$

$$I_{CA} = I_{AB\ell}\angle +120 = 13.2\angle 156.87A$$

في حالة التوصيل دلتا تيار الخط يتأخر عن تيار الوجه بزاوية مقدارها(٣٠) درجة وتزداد القيمة بقدار(٣√) عن قيمة تيار الوجه.

$$I_a = I_{AB}\sqrt{3}\angle -30 = (13.2\angle 36.87)(\sqrt{3}\angle -30) = 22.86\angle 6.87A$$

$$I_b = I_a\angle -120 = 22.86\angle -113.13A$$

$$I_c = I_a\angle +120 = 22.86\angle 126.87A$$

٥- ٤ القدرة الكهربية في دوائر التيار المتردد ثلاثي الأوجه

تنقسم القدرة الكهربية إلى قدرة فعالة وغير فعالةكما في دوائر التيار المتردد أحادي الوجه. القدرة الفعالة والظاهرية التي تستهلكها الأحمال ثلاثية الاوجة المتزنة تساوي ثلاثة أضعاف القدرة سواء كانت فعالة أو ظاهرية . ويمكن حساب القدرة كمايلي :

القدرة الفعالة للوجه الواحد

$$P = VI\cos\Phi \qquad (٥- ٣٢)$$

حيث Φ هي معامل القدرة وهي الزاوية المحصورة بين جهد وتيار الخط

القدرة الكلية

$$P_T = 3P \qquad (٥- ٣٣)$$

القدرة في التوصيل (نجمة ودلتا)

$$P_T = \sqrt{3}V_L I_L \cos\Phi \qquad (٥- ٣٤)$$

القدرة غير الفعاله للحمل ثلاثي الأوجه

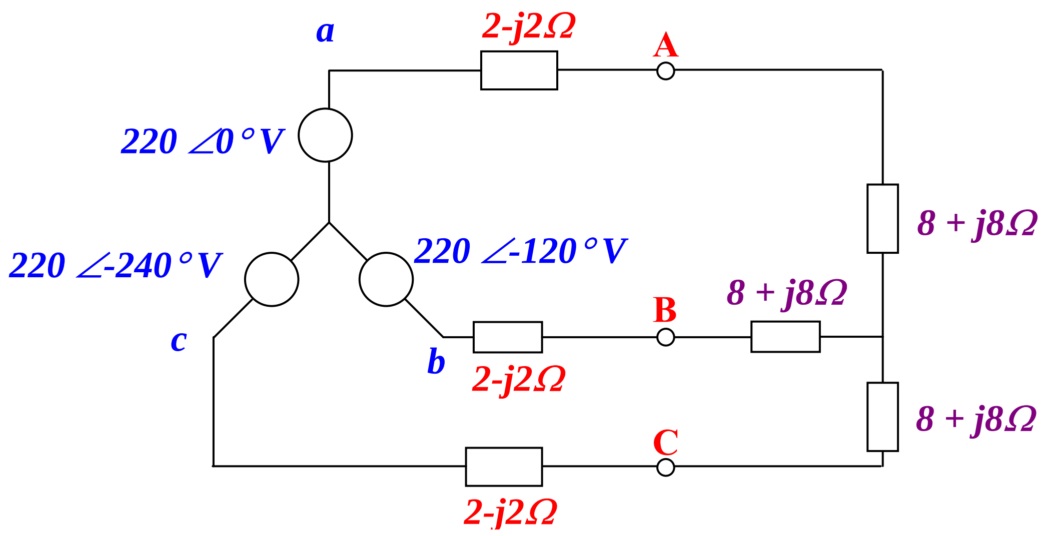
$$Q_T = \sqrt{3}V_L I_L \sin\Phi \qquad (٥- ٣٥)$$

الفدرة الظاهرية الكلية

$$S_T = \sqrt{3}V_L I_L \qquad (٥- ٣٦)$$

تدريبات على الوحدة الخامسة

١. احسب قيمة التيارات في الدائرة ثلاثية الاوجة الموصلة عل شكل Y - Y كما هو موضح بالرسم.



٢. احسب قيمة تيارات الخطوط والاوجة في الدائرة ثلاثية الاوجة المتزنة الموصلة عل شكل نجمة – دلتا كما هو موضح بالرسم شكل (٥- ٧) علما بأن:

$$V_{AB} = 180\angle -20 \ \ V$$
$$Z_{\Delta} = 20\angle 40 \ \ \Omega$$

٣. احسب قيمة تيارات الخطوط و جهود الاوجة في الدائرة ثلاثية الاوجة المتزنة الموصلة عل شكل نجمة – نجمة كما هو موضح بالرسم شكل (٥- ٦) علما بأن:

$$V_{AB} = 180\angle -20 \ \ V$$
$$Z_{\Delta} = 20\angle 40 \ \ \Omega$$

٤. إذا كانت قيمة الأحمال المتزنة الموصلة في صورة دلتا 18+j12 اوم موصلة مع مولد موصل في صورة دلتا(Vab=22.5 ∠ 35). احسب تيار الوجه للدائرة على الأحمال .

المراجع (References)

(1) Thomas L. Floyed, Electrical Engineering Fundamentals, Prentice, Inc, sixth edition, 2000.
(2) B. L. Theraja, A. K. Theraja, " Electrical Technology", published by Ninja Construction development Co. Ltd. Ram Nagar, New Delhi, 110055, 1995.
(3) M. A. PAI, "Introduction to Electric Circuits and Machines", Affiliated east west presses private limited, 1975.
(4) Robert B., Louis N., "Electricity, Electronucs and Electromagnetics", Prentice- Hall, Inc, Englewood Cliffs, NJ 07632, 2nd edition
(5) Jimmie J.Cathey, Syed A. Nassar, " Basic Electrical Engineering" Inter.House for Cultural Investments, 2nd edition.

المحتويات