فصل خريف 2021/2020م | كلية الهندسة – جامعة مصراتة | القسم/ العـــــــــام

الامتحان النهائي لمقرر/ إحصاء واحتمالات (ع.ع 206) | الزمن/ ساعتان ونصف

التاريخ: 2020/12/19 | أستاذ المادة/ عبد الله شفتر

الإجــــابـــــة النمـــــــوذجـــــية

أجب عن جميع الأسئلة التالية

(مع مراعاة اخذ 4 أرقام عشرية)

السؤال الأول: **(8 درجات)**

البيانات التالية تبين تقدير الطلبة في مادة الإحصاء في أحد السنوات السابقة:

التقدير	ممتاز	جيد جداً	ضعيف جداً	جيد	ضعيف
عدد الطلبة	13	30	11	27	18

أوجد:

1- الوسيط $\tilde{x}$؟

2- المنوال m؟

الحل:

رتبة الوسيط = $\frac{99+1}{2} = 50$

نرتب البيانات ترتيب تصاعدي:

التقدير	عدد الطلبة	المتجمع الصاعد
ضعيف جداً	11	11
ضعيف	18	29
جيد	27	56
جيد جداً	30	86
ممتاز	13	99
المجموع	99	

يكون الوسيط هو: $\boxed{\text{جيد}}$

المنوال هو: $\boxed{m = \text{جيد جداً}}$

السؤال الثاني: **(8 درجات)**

الجدول التالي يبين الدخل الشهري لموظفين شركة معينة:

الدخل الشهري	1400−1000	1900−1500	2400−2000	2900−2500
عدد الموظفين	4	6	10	4

أوجد:

1− الوسط الحسابي $\bar{x}$ ؟

2− العزم الرابع m'_4 ؟

الحل:

الدخل الشهري	عدد الموظفين f_i	x_i	$x_i * f_i$	$f_i * (x_i - \bar{x})^4$
1400−1000	4	1200	4800	$1.571 * 10^{12}$
1900−1500	6	1700	10200	$4.342 * 10^{10}$
2400−2000	10	2200	22000	$1.884 * 10^{10}$
2900−2500	4	2700	10800	$1.007 * 10^{12}$
المجموع	24		47800	$2.6403 * 10^{12}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{47800}{24} = \mathbf{1991.667}$$

$$m'_4 = \frac{\sum f_i * (x_i - \bar{x})^4}{\sum f_i} = \frac{2.6403 * 10^{12}}{24} = \mathbf{1.100 * 10^{11}}$$

السؤال الثالث: **(7 درجات)**

إذا كان A وB و C ثلاثة أحداث معرفة على نفس فراغ العينة بحيث P(A)=0.25، P(B)=**p**، P(C)=**q** و $P(A \cup B \cup C) = 0.6175$ و $P(A \cap B \cap C) = 0.015$، أوجد قيمة p و q التي تجعل الاحداث A وB وC أحداثاً مستقلة؟

الحل:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$

$$0.015 = 0.25 * p * q \qquad \rightarrow \qquad p = \frac{0.06}{q}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$0.6175 = 0.25 + p + q - (0.25 * p) - (0.25 * q) - (p * q) + (0.25 * p * q)$$

$$0.6175 = 0.25 + \frac{0.06}{q} + q - \left(0.25 * \frac{0.06}{q}\right) - (0.25 * q) - \left(\frac{0.06}{q} * q\right) + \left(0.25 * \frac{0.06}{q} * q\right)$$

$$0.4125 = 0.75 * q + \frac{0.045}{q} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{q = 0.400}$$

$$p = \frac{0.06}{q} = \frac{0.06}{0.400} = \mathbf{0.150}$$

السؤال الرابع: **(7 درجات)**

في مصنع لإنتاج الاسمنت توجد 4 خطوط تعبئة لأكياس الاسمنت، حيث 40% من الإنتاج تتم تعبئته من الخط الأول و30% من الإنتاج تتم تعبئته من الخط الثاني و20% من الإنتاج تتم تعبئته في الخط الثالث وبقية الإنتاج تتم تعبئته في الخط الأخير، فإذا تم اختيار كيس بطريقة عشوائية ووجد أن وزنه غير مضبوط، فما احتمال أن يكون معبئ من الخط الثالث؟ إذا علمت أن احتمال تعبئة كيس غير مضبوط في الخطوط الأربعة هو 2% و3.5% و5% و7% على الترتيب.

الحل:

بفرض أن: الحدث B احتمال سحب كيس غير مضبوط الوزن.

$$P(A_1) = 0.40 \qquad P(A_2) = 0.30 \qquad P(A_3) = 0.20 \qquad P(A_4) = 0.10$$

$$P(B/A_1) = 0.02 \qquad P(B/A_2) = 0.035 \qquad P(B/A_3) = 0.05 \qquad P(B/A_4) = 0.07$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)*P(B/A_3)}{P(A_1)*P(B/A_1)+P(A_2)*P(B/A_2)+P(A_3)*P(B/A_3)+P(A_4)*P(B/A_4)}$$

$$= \frac{0.20 * 0.05}{0.40 * 0.02 + 0.30 * 0.035 + 0.20 * 0.05 + 0.10 * 0.07} = \mathbf{0.282}$$

السؤال الخامس: **(8 درجات)**

إذا علمت أن معدل عدد المكالمات الهاتفية التي تستقبلها إدارة معينة هو 5 مكالمات في الساعة، أوجد احتمال:

1- استقبال على الأقل مكالمتين خلال ساعتين معينتين؟

2- استقبال على الأكثر مكالمة واحدة خلال 15 دقيقة؟

3- عدم استقبال أي مكالمة خلال ساعة معينة؟

الحل:

باستخدام توزيع بواسون:

1- استقبال على الأقل مكالمتين خلال ساعتين معينتين:

$$\lambda = 5 * 2 = 10$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{10^0 * e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 * e^{-10}}{1!} \right] = \mathbf{0.9995}$$

2- استقبال على الأكثر مكالمة واحدة خلال 15 دقيقة:

$$\lambda = 5 * \frac{1}{4} = 1.25$$

$$P(X \leq 1) = [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= \frac{1.25^0 * e^{-1.25}}{0!} + \frac{1.25^1 * e^{-1.25}}{1!} = \mathbf{0.6446}$$

3- عدم استقبال أي مكالمة خلال ساعة معينة؟

$$\lambda = 5$$

$$P(X = 0) = \frac{5^0 * e^{-5}}{0!} = \mathbf{0.0067}$$

السؤال السادس: **(12 درجات)**

دالة المتغير العشوائي x معرفة كما يلي:

$$f_x(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x < 0.5 \\ a(1-x) & 0.5 \le x < 1 \\ 0 & ow \end{cases}$$

أوجد كل من:

1- قيمة a التي تجعل الدالة دالة كثافة احتمالية (دالة احتمالية متصلة)؟

2- دالة التوزيع التراكمي $\mathrm{c.d.f}$ $F_x(x)$ للمتغير العشوائي x؟

3- $P(-1 < x < 0.75)$ و $P(0 < x < 1)$ ؟

الحل:

1- قيمة a التي تجعل الدالة دالة كثافة احتمالية (دالة احتمالية متصلة):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{0.5} a * x\, dx + \int_{0.5}^{1} a * (1-x) dx + \int_{1}^{+\infty} 0\, dx = 1$$

$$0 + \left[\frac{a * x^2}{2}\right]_0^{0.5} + \left[a.\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_{0.5}^{1} + 0 = 1$$

$$0 + \left(\frac{0.25 * a}{2} - 0\right) + a * \left[\left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(0.5 - \frac{0.5^2}{2}\right)\right] + 0 = 1$$

$$\boldsymbol{a = 4}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x < 0.5 \\ 4(1-x) & 0.5 \le x < 1 \\ 0 & ow \end{cases}$$

2- دالة التوزيع التراكمي $\mathbf{c.d.f}$ $F_x(x)$ للمتغير العشوائي x:

$x < 0 \qquad F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx = \mathbf{0}$

$0 \le x < 0.5 \qquad F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{x} 4x\, dx = \boldsymbol{2x^2}$

$0.5 \le x < 1 \qquad F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{0.5} 4x\, dx + \int_{0.5}^{x} 4(1-x) dx$

$$= \mathbf{0.5} + 4\left[x - \frac{\boldsymbol{x^2}}{2} - 0.5 + \frac{0.25}{2}\right] = \boldsymbol{-2x^2 + 4x - 1}$$

$x \ge 1 \qquad F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{0.5} 4x\, dx + \int_{0.5}^{1} 4(1+x) dx + \int_{1}^{x} 0\, dx = \mathbf{1}$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x^2 & 0 \leq x < 0.5 \\ -2x^2 + 4x - 1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

3- $P(-1 < x < 0.75)$ و $P(0 < x < 1)$:

$$P(-1 < x < 0.75) = \int_{-1}^{0.75} f_x(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{0.5} 4 * x\,dx + \int_{0.5}^{0.75} 4 * (1 - x)\,dx = \mathbf{0.875}$$

حر آخر:

$$P(-1 < x < 0.75) = -2 * (0.75)^2 + 4 * (0.75) - 1 = \mathbf{0.875}$$

$$P(0 < x < 1) = \int_{0}^{1} f_x(x)\,dx = \int_{0}^{0.5} 4 * x\,dx + \int_{0.5}^{1} 4 * (1 - x)\,dx = \mathbf{1}$$

حل آخر:

$$P(0 < x < 1) = -2 * (1)^2 + 4 * 1 - 1 = \mathbf{1}$$

**** انتهت الأسئلة ****

بالتوفيق للجميع ...